ÜBER

DIE ASTRONOMISCHE REFRACTION.

VON

HOFRATH PROF. **THEODOR** RITTER V. **OPPOLZER**,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. MAI 1886.

§. 1. Vorbemerkungen.

Die in der folgenden Abhandlung zur Entwicklung gelangende Theorie der astronomischen Refraction soll hauptsächlich in der Richtung einen Fortschritt anbahnen, dass auf die Verhältnisse, wie dieselben durch die untersten Luftschichten dargeboten werden, gehörige und ausreichende Rücksicht genommen werden kann, und dass ferner auf die Bestimmung jener kleinen Glieder, welche man gewöhnlich in den bisherigen Refractionstheorien zu vernachlässigen pflegt, eingegangen werden soll.

Die in der vorliegenden Theorie der Refraction über die Constitution der Atmosphäre gemachten Annahmen schliessen sich einerseits den bekannten Thatsachen in sehr befriedigender Weise an und gestatten anderseits den für die Berechnung der Refraction in der Nähe des Horizontes bisher üblichen nicht selten sehr schwerfälligen Rechnungsmechanismus mit Benützung weniger Hilfstafeln durch elegante und bequeme Methoden zu ersetzen; die zweckmässige Wahl eines Parameters f gestattet nämlich, wenn es nicht auf die äusserste Genauigkeit ankommt, die Refraction durch eine einzige unvollständige Gammafunction darzustellen.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass ich den Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf die Refraction vorerst nicht in Betracht gezogen habe, weil sich darüber gegenwärtig keine genügenden Angaben machen lassen; jedenfalls ist der Einfluss derselben sehr klein und vermischt sich mit anderweitigen nicht leicht durch Rechnung zu ermittelnden Anomalien; sollte die Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit seinerzeit als wünschenswerth erscheinen, so werden sich die nöthigen Correctionen leicht nach den hier entwickelten Methoden berechnen lassen.

Die Construction von Refractionstafeln soll erst dann in Angriff genommen werden, bis ich jene Hilfsmittel, welche mir geeignet erscheinen, die in dem Problem auftretenden Parameter sicher zu bestimmen, in Anwendung gezogen habe.

§. 2. Vorbereitende Transformationen der Differentialgleichung für die Refraction.

Die bekannte Differentialgleichung für die Refraction lautet:

$$\partial R = \frac{(1-s)\sin z\,\partial\mu}{\mu\left\{\cos z^2 - \left(1-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) + (2s-s^2)\sin z^2\right\}^{1/2}}; \qquad 1)$$

dieselbe ist aber nur so lange als streng zu bezeichnen, als man das Snellius'sche Brechungsgesetz als völlig zutreffend annimmt und eine dem angenommenen Krümmungsradius entsprechende concentrische Schichtung der Luft voraussetzt. Die Richtigkeit des Brechungsgesetzes wird wohl gegenwärtig nicht bezweifelt werden können, wohl aber die letztere hypothetische Annahme besonders für grosse Zenithdistanzen, bei denen der Lichtstrahl lange Zeit nahe über die Erdoberfläche hinwegstreift, die mehrfach uneben ist und ein sehr verschiedenes Wärmestrahlungsvermögen besitzt; doch selbst für wenig grosse Zenithdistanzen können starke Störungen in dem Gleichgewichte der Atmosphäre und besonders die ungleichen Temperaturverhältnisse zwischen dem Beobachtungsraum und dem äusseren Medium ganz merkliche Unregelmässigkeiten bewirken, die sich kaum mit Sicherheit berechnen lassen; zeigen demnach die Luftschichten eine wesentliche Abweichung von dem in der Differentialgleichung supponirten Parallelismus, so können besonders für sehr grosse Zenithdistanzen beträchtliche Abweichungen entstehen.

In der Gleichung 1) stellt μ den Brechungsindex der Luft für das in Betracht kommende Element der Refractionscurve, μ_0 aber den Brechungsindex für die unterste Luftschichte vor, in welcher die Richtung des einfallenden Strahles mit der Lothlinie den Winkel z einschliesst; es ist sonach z die scheinbare Zenithdistanz des beobachteten Objectes am Beobachtungsorte; ist a der Krümmungsradius der Erdoberfläche, und sei r der Abstand der in Betracht gezogenen Luftschichte von dem Krümmungsmittelpunkte, so ist s bestimmt durch die Relation:

$$s = \frac{r-a}{r}, \qquad 2)$$

s ist sonach die Höhe der Luftschichte, ausgedrückt in Einheiten der Entfernung derselben vom Krümmungsmittelpunkte. R stellt die zu ermittelnde Refraction vor, und die Differentialgleichung 1) ist so angesetzt, dass nach erfolgter Integration als untere Grenze die für den Weltraum, als obere Grenze die für den Beobachtungsort geltenden Werthe eingesetzt werden müssen. Um diese letztere Bemerkung anschaulich zu machen, möge eine ganz genäherte Integration der Gleichung 1) versucht werden. Ist $\cos z$ nicht sehr klein, so wird das Glied $\cos z^2$ gegen die folgenden Glieder des obigen Wurzelausdruckes überwiegen, da $\left(1-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)$ und s selbst für die obersten Luftschichten, denen man noch eine merkliche brechbare Wirkung zuschreiben kann, nur sehr kleine Beträge darstellen; man kann sohin mit einer gewissen Annäherung, so lange man dem Horizonte nicht zu nahe kommt, statt 1) schreiben:

$$\partial R = \operatorname{tg} z \frac{\partial \mu}{\mu}.$$

Die Integration dieser Gleichung und die Einsetzung der oben angegebenen Grenzen gibt sofort:

$$R = (\log\text{nat}\, \mu_0) \operatorname{tg} z.$$

Dieses Resultat gibt zu einer nicht unwichtigen Bemerkung Veranlassung; es wird nämlich die Refraction, wenigstens für nicht allzu grosse Zenithdistanzen, von der Constitution der Atmosphäre, sobald man die concentrische Schichtung als vorhanden annimmt, so gut als unabhängig sein und fast nur eine Function des Luftdruckes und der Temperatur jener Luftschichte werden, in der sich der Beobachter befindet. Diese Betrachtungen lehren, dass man im Allgemeinen gut thun werde, bei der Berechnung der Refraction jene Thermometer- und Barometerstände, welche in unmittelbarer Nähe des Beobachtungsinstrumentes stattfinden, in Anwendung zu ziehen und nicht, wie dies so häufig geschieht, Temperaturen, die ausserhalb des Beobachtungsraumes abgelesen werden, hiezu zu verwenden; denn wenn auch bei fundamentalen Beobachtungen darauf Bedacht genommen werden muss, dass die Temperaturen innerhalb des Beobachtungsraumes mit den äusseren möglichst ausgeglichen seien, so wird sich im Allgemeinen ein völliger Ausgleich nicht herstellen lassen, und meist wird ein Unterschied in dem Sinne bestehen, dass am Tage der Beobachtungsraum kühler, in der Nacht wärmer sein wird als die äussere Luft. So z. B. geben die so genauen Pulkowaer Beobachtungsreihen selbst mässig grosse Zenithdistanzen am Tage kleiner als in der Nacht, welcher Unterschied

sich aus den vorangehenden Bemerkungen leicht erklärt, wenn man beachtet, dass bei der Reduction der Pulkowaer Beobachtungen die äusseren Lufttemperaturen angewendet werden; allerdings ist angesichts eines solchen Verhältnisses bei dem Übergange des Lichtstrahles in den inneren Raum auf eine völlig horizontale Schichtung, wie die Theorie dieselbe voraussetzt, nicht mit Sicherheit zu rechnen; doch wird auch hier diese Hypothese die plausibelste sein, da die zweifellos gesetzmässigen Änderungen unterworfene Krümmung der Schichten sich wohl kaum annähernd genau bestimmen lassen wird. Es soll gleich hier darauf hingewiesen werden, dass die folgende Abhandlung das Resultat zu Tage fördert, es zeige die Refraction selbst eine tägliche Periode, die in ähnlicher Weise bei heiterem Wetter am Tage die Refractionsbeträge vermindert und in der Nacht vermehrt; doch kommen diese Variationen für den hier berührten Gegenstand nicht in Betracht, da dieselben nur für grosse Zenithdistanzen merklich werden können; für Zenithdistanzen selbst bis 70° sind sie völlig verschwindend.

Für die weitere Behandlung der obigen Differentialgleichung ist es förderlich, den Brechungsindex μ mit der Dichte der Luft ρ in Zusammenhang zu bringen; es scheint, dass man ohne merklichen Fehler μ als einfache Function von ρ darstellen kann, wenn auch neuere Untersuchungen darauf hinzuweisen scheinen, dass für dieselbe Luftdichte bei verschiedenen Temperaturen eine geringe Verschiedenheit von μ vorhanden sei; jedenfalls sind diese Abweichungen so gering, dass man der Form:

$$\mu^2-1=f(\rho), \tag{3}$$

welche μ als eine Function der Luftdichte darstellt, eine Berechtigung wird nicht absprechen können Bezeichnet man mit ρ_0 die Dichte der Luftschichte am Beobachtungsorte und bestimmt α durch die Relation:

$$2\alpha=\frac{f(\rho_0)}{1+f(\rho_0)}, \tag{4}$$

so wird α jene Grösse darstellen, die für bestimmte Thermometer- und Barometerstände gemeiniglich als Constante der Refraction bezeichnet wird. Setzt man überdies, um die Schreibweise möglichst zu vereinfachen:

$$\frac{f(\rho)}{f(\rho_0)}=x, \tag{5}$$

so erhält man zunächst durch die Differentiation der Gleichung 3) mit Benützung der Relation 5):

$$2\mu\,\partial\mu=f(\rho_0)\,\partial x;$$

es ist also, da $\mu_0^2-1=f(\rho_0)$ wird:

$$\frac{\partial\mu}{\mu}=\frac{f(\rho_0)}{2\mu^2}\,\partial x=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(\rho_0)}{1+f(\rho_0)}\cdot\frac{1+f(\rho_0)}{\mu^2}\,\partial x=\alpha\,\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\,\partial x. \tag{6}$$

Weiter ist:

$$\frac{\mu^2}{\mu_0^2}=\frac{1+f(\rho)}{1+f(\rho_0)}=1-\frac{f(\rho_0)}{1+f(\rho_0)}\left\{1-\frac{f(\rho)}{f(\rho_0)}\right\}=1-2\,\alpha(1-x),$$

daher:

$$1-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}=2\alpha\,(1-x). \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf diese Transformationen nimmt die oben angeführte Differentialgleichung der Refraction die Gestalt:

$$\partial R=\frac{\alpha\,(1-s)\sin z\,\partial x}{\{1-2\alpha(1-x)\}\,\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+(2s-s^2)\sin z^2\}^{1/2}} \tag{8}$$

an. Mag die Form der Function f wie immer beschaffen sein, so wird als untere Grenze für x der Werth Null, als obere Grenze die Einheit zu nehmen sein, denn der Brechungsindex μ für den Weltraum wird der Einheit gleich werden [also $f(\rho)=0$], für die Erdoberfläche wird aber $f(\rho)=f(\rho_0)$.

Über die Form der Function f sind die Ansichten der Physiker bislang getheilt; auf Grundlage der Emanationstheorie hatte man früher angenommen, dass $\mu^2-1=c\rho$ sei, in welchem Ausdrucke c eine für ein bestimmtes Gas geltende Constante darstellt; in neuerer Zeit neigt man sich mehr der Ansicht zu, dass die Form $\mu-1=c'\rho$, in welchem Ausdrucke c' eine Constante vorstellt, eine grössere Berechtigung habe; beachtet man aber, dass im Maximum etwa μ den Werth 1·0003 erhält, so wird man sofort einsehen, dass es praktisch ganz gleichgiltig ist, welche der beiden Hypothesen man wählt; denn man findet:

$$c=c'(1+\mu),$$

es ist sonach, wenn die letztere Form die richtige ist, c sehr nahe constant, indem die maximalen Unterschiede nur von der Ordnung des Quadrates des Überschusses von μ über die Einheit sind. Es soll daher in der Folge:

$$x=\frac{\rho}{\rho_0} \tag{9}$$

angenommen werden.

§. 3. Differentialgleichung zwischen s und x.

Bei der im vorangehenden Absatze angeführten Differentialgleichung 8) wird nur dann an eine Integration derselben geschritten werden können, wenn der Zusammenhang der beiden in derselben auftretenden Variabeln s und x erkannt ist. Es wird sich aber hiebei bald herausstellen, dass dieser Zusammenhang nur dann mit Sicherheit ermittelt werden kann, wenn das Gesetz der Temperaturabnahme der Luft mit der Erhebung über die Erdoberfläche, also der Zusammenhang von s und t bekannt ist, eine Relation, die im folgenden Absatze näher behandelt werden wird. Vorerst soll nur der Zusammenhang zwischen s und x, soweit dies ohne Kenntniss der bezüglichen Temperaturverhältnisse möglich ist, entwickelt werden.

Da die Dichte der Luft nur mittelbar durch die Beobachtung des Luftdruckes bestimmt wird, so ist es die nächste Aufgabe, die hiebei auftretenden Verhältnisse klarzulegen. Ist B die vollständig corrigirte, auf 0° reducirte Barometerlesung, q die Dichte des Quecksilbers bei 0°, g die Schwere am Beobachtungsorte, so hat man offenbar als Maass des Luftdruckes p (die elastische Kraft der Luft) die Gleichung:

$$p=gqB. \tag{1}$$

Weiter lehrt das Mariotte'sche Gesetz, welches für die vorliegenden Untersuchungen als streng richtig angesehen werden kann, dass das Volumen eines Gases bei gleicher Temperatur sich umgekehrt verhält, wie die auf dasselbe wirkenden Druckkräfte, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass sich bei gleicher Temperatur die Dichten wie die Druckkräfte verhalten; diese letztere Relation folgt sofort aus der ersteren, wenn man sich vergegenwärtigt, dass mit der Vergrösserung des Volumens eines Gases nothwendig die Dichte in linearer Weise zu derselben abnimmt. Ändert sich dagegen die Temperatur, so ist, wie dies Gay-Lussac zuerst experimentell nachgewiesen hat, die Ausdehnung für alle permanenten Gasarten sehr nahe proportional der Temperatur und für alle Temperaturen sehr nahe constant. Bezeichnet man den Ausdehnungscoëfficienten der Volumeinheit atmosphärischer Luft für 1° Celsius Temperaturzunahme mit m, für welchen Werth die neueren Bestimmungen 0·003670 ergaben, das Volumen der Luft bei 0° mit (V_0), so werden die Volumina V_0 und V für die beziehungsweise stattfindenden Temperaturen t_0 und t (Celsius) bestimmt sein durch:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= (V_0)(1+mt_0) \\ V &= (V_0)(1+mt\,). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nennt man die zu V_0 und V gehörenden Dichten ρ_0 und ρ', so wird, da sich die Dichten umgekehrt wie die Volumina verhalten, sich ergeben:

$$\frac{\rho'}{\rho_0}=\frac{1+mt_0}{1+mt}, \tag{3}$$

welche Relation jedoch nur gilt, so lange der Barometerstand constant bleibt.

Geht aber der Luftdruck von p_0 ohne eine Temperaturänderung auf p über, so wird sich die Dichte ρ' abändern und etwa den Werth ρ annehmen. Beachtet man das Mariotte'sche Gesetz, so wird sein:

$$\rho' : \rho = p_0 : p,$$

woraus man in Verbindung mit der Gleichung 3) erhält:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{1+mt}{1+mt_0}, \tag{4}$$

welche Relation sofort zeigt, dass in der That eine Relation zwischen Druck und Dichte hergestellt werden kann, wenn die zugehörigen Temperaturen gegeben sind.

Um nun die Differentialgleichung für die Abnahme des Luftdruckes $(-\partial p)$ mit der Höhe zu erhalten, beachte man, dass dieselbe bestimmt wird durch das Product der differentiellen Höhenänderung ∂h in die Dichte der Luft ρ und die Schwere. Bezeichnet man mit g die am Beobachtungsorte stattfindende Schwere, mit h die Höhe über dem Beobachtungsorte, in welcher die Änderung des Druckes in Betracht gezogen wird, mit a den Krümmungsradius der Erdoberfläche für den Beobachtungsort, so wird man für den gesuchten Ausdruck mit einem hohen Grade der Annäherung annehmen dürfen:

$$\partial p = -g\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \rho\,\partial h,$$

in welcher Formel jedoch die Zunahme der Fliehkraft mit der Höhe, die Abänderung der Schwerkraft durch die locale Dichte der Erdoberfläche und auch der Zuwachs an Schwerkraft, der aus den unter dem Elemente liegenden Luftschichten entsteht, als zu unbedeutend völlig übergangen wird.

Führt man in dieser Gleichung für h die Grösse s, welche in der Differentialgleichung der Refraction auftritt, durch die Relation:

$$s = \frac{h}{a+h}, \quad \text{also} \quad \partial s = \frac{a\partial h}{(a+h)^2},$$

ein, so findet sich:

$$\partial p = -ag\rho\,\partial s. \tag{5}$$

Die Differentiation der Gleichung 4) liefert, wenn man bedenkt, dass p eine Function von ρ und t ist:

$$\partial p = \frac{p_0}{\rho_0(1+mt_0)}\partial\{\rho(1+mt)\}.$$

Eliminirt man also mit Hilfe der Gleichung 5) ∂p, so findet sich sofort, wenn man sich an die oben (pag. 4, Gl. 9) angenommene Bedeutung von x erinnert, und abkürzend:

$$L(1+\xi) = \frac{p_0}{ag\rho_0(1+mt_0)}, \tag{6}$$

setzt, die gesuchte Differentialgleichung:

$$-\partial s = L(1+\xi)\frac{\partial\{x(1+mt)\}}{x}. \tag{7}$$

Die Gleichung 7) ist aus zwei wesentlich verschiedenen Factoren zusammengesetzt. Der Factor $L(1+\xi)$, dessen hier gewählte Schreibweise durch die unten folgenden Entwicklungen klar werden wird, ist durchaus nur von Grössen abhängig, die sich unmittelbar aus der Lage des Beobachtungsortes und durch Beobachtungen an geeigneten Instrumenten (Baro- und Thermometer) ableiten lassen; der Factor $\frac{\partial\{x(1+mt)\}}{x}$ wird aber nur dann näher bestimmt werden können, wenn bestimmte Annahmen über die Constitution der Atmosphäre gemacht werden, auf welchen Gegenstand erst die Betrachtungen des folgenden Abschnittes näher eingehen werden. An die Definirung des ersten Factors, nämlich $L(1+\xi)$, soll aber hier sofort geschritten

werden. In diesem Ausdrucke erscheint zuerst rechts vom Gleichheitszeichen der reciproke Werth des Krümmungsradius für den Beobachtungsort. Derselbe wird mit ausreichender Annäherung durch Addition der Höhe des Beobachtungsortes über der Meeresfläche h_0 zum Krümmungsradius der letzteren (a) gefunden. Derselbe ist aber nicht nur mit der Polhöhe φ veränderlich, sondern auch mit dem Azimuthe A. Bezeichnet man mit γ die Abplattung der Erde, deren numerischer Werth nach Bessel:

$$\frac{1}{\gamma} = 299\cdot 1528,$$

angenommen werden kann, so findet sich daraus die Excentricität einer Meridianellipse bekanntlich durch die Relation:

$$e^2 = 2\gamma - \gamma^2, \quad \log e = 8\cdot 912\ 2052-10.$$

Für den Krümmungsradius der Meeresfläche (a) findet sich aber, wenn man den Äquatorhalbmesser der Erde als Einheit annimmt, für die Polhöhe φ und das Azimuth A setzt, der Ausdruck:

$$(a) = \frac{1-e^2}{(1-e^2+e^2\cos\varphi^2\cos A^2)\sqrt{1-e^2\sin\varphi^2}}.$$

Beachtet man, dass e^2 einen mässigen Werth darstellt (annähernd $2:300$), so dürfte es dem hier gestellten Problem angemessen erscheinen, sich auf die ersten Potenzen dieser Grösse zu beschränken, indem durch die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung (also von der Ordnung e^4) im Logarithmus von (a) nur Fehler von einigen Einheiten der sechsten Decimale bewirkt werden können. Man wird ohne Schwierigkeit, wenn man die Entwicklung in der angedeuteten Weise ausführt und anstatt der Potenzen der trigonometrischen Functionen die vielfachen Winkel einsetzt, für den reciproken Werth von (a) finden:

$$\frac{1}{(a)} = 1 + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{e^2}{4}\cos 2A\,\{1+\cos 2\varphi\}. \qquad 8)$$

Die weiteren Glieder zweiter Ordnung, welche wie die noch höherer Ordnung vernachlässigt werden sollen, sind:

$$\frac{11}{64}e^4 + \frac{5}{16}e^4\cos 2\varphi + \frac{1}{64}e^4\cos 4\varphi + \frac{1}{4}e^4\cos 2A\left\{\frac{7}{8} + \cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi\right\} + \ldots$$

Will man $1:(a)$ in Metern ausgedrückt erhalten, so wird man rechts vom Gleichheitszeichen in 8) mit dem Äquatorhalbmesser, in Metern ausgedrückt, zu dividiren haben. Bessel gibt für den Äquatorhalbmesser der Erde den Werth 3272077·14 Toisen an; mit dem Verwandlungsfactor:

$$\log\frac{\text{Toise}}{\text{Meter}} = 0\cdot 2898199300,$$

erhält man also für den Äquatorhalbmesser 6377397·16 Meter, und hiemit kann man der Gleichung 8) die folgende numerische Form geben, in der die überstrichenen Zahlen Logarithmen derselben vorstellen:

$$\frac{1}{(a)} = (\overline{3\cdot 195357-10}) + (\overline{0\cdot 718737-10})\cos 2\varphi + (\overline{0\cdot 417707-10})\{1+\cos 2\varphi\}\cos 2A. \qquad 8)^*$$

Um nun den Übergang auf den reciproken Werth von a zu machen, beachte man die oben als zulässig bezeichnete Näherung:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{(a)+h_0}.$$

Da aber h_0 nothwendig stets sehr klein im Verhältniss zu (a) ist, darf man hiefür mit genügender Annäherung schreiben:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{(a)} - \frac{h_0}{(a)^2}; \qquad 9)$$

drückt man also die Meereshöhe für den Beobachtungsort durch h_0 in Metern aus und beachtet, dass man ohne Nachtheil für die Genauigkeit die Producte von h_0 in e^2 übergehen darf, so wird man haben:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{(a)} - \frac{}{(6\cdot 3907-20)}\, h_0 \qquad 9)^*$$

womit in Verbindung mit 8)* der Factor $1:a$ im Ausdrucke für $L(1+\xi)$ erledigt erscheint. Der Factor $p_0 : g\rho_0$ im Ausdrucke $L(1+\xi)$ wird sich in ähnlicher Weise entwickeln lassen. Man wird sich gegenwärtig zu halten haben, dass hier unter p_0, ρ_0 und g beziehungsweise der Luftdruck, die Luftdichte und die Schwere für den Beobachtungsort verstanden wird. Bezeichnet man mit (ρ_0) die Dichte der Luft, die unter dem 45. Breitengrade an der Meeresfläche bei 0° Temperatur und unter einem auf 0° reducirten Barometerstand von 0·76 Meter Quecksilber stattfindet, so hat man, wenn der Luftdruck unter diesen Bedingungen mit (p_0) bezeichnet wird, nach 1):

$$(p_0) = 0\cdot 76 (g) q, \qquad 10)$$

in welchem Ausdrucke (g) die Schwerkraft unter dem 45. Parallel vorstellt. Wendet man nun, um das Verhältniss der Dichte (ρ_0) zu ρ_0 zu bestimmen, die Gleichung 4) an, nachdem man in dieselbe statt p, ρ und t die Werthe (p_0), (ρ_0) und 0 eingesetzt hat, so resultirt:

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{(p_0)}{(\rho_0)}(1+mt_0);$$

dividirt man beiderseits mit $ag(1+mt_0)$, so findet sich mit Rücksicht auf 10):

$$L(1+\xi) = \frac{p_0}{ag\rho_0(1+mt_0)} = \left[0\cdot 76\,\frac{q}{(\rho_0)}\right]\frac{(g)}{ag}. \qquad 11)$$

Der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck ist nichts anderes, als der gewöhnlich mit dem Namen der Höhe der homogenen Atmosphäre bezeichnete Werth und stellt das Verhältniss der Dichte des Quecksilbers zur Luft, multiplicirt mit 0·76 vor.

In der Gleichung 11) muss nun der Quotient $\frac{(g)}{g}$ näher betrachtet werden. Bezeichnet man mit g' die Schwere am Meeresniveau in der Breite φ, so besteht zur Bestimmung der Schwere der Ausdruck:

$$g' = (g)\{1-0\cdot 0025791 \cos 2\varphi\}. \qquad 12)$$

Dieser numerische Coëfficient ist entlehnt aus Jelinek's „Anleitung zur Anstellung meteorologischer Beobachtungen" (2. Aufl., p. 198) und daselbst abgeleitet aus dem Resultate, welches Baily aus einer sorgfältigen Discussion der an verschiedenen Orten ausgeführten Messungen der Länge des Secundenpendels gefunden hat. Anderseits wird auch ein Unterschied zwischen g' und g darin bestehen, dass sich der Beobachtungsort in einer Höhe h_0 über der Meeresfläche befindet; die Anwendung des Factors:

$$\left\{\frac{(a)}{(a)+h_0}\right\}^2,$$

zu dieser Reduction würde wenig genaue Resultate liefern, da hiebei die Voraussetzung gemacht wird, dass sich der Beobachtungsort frei, ohne anziehende Unterlage, in der Höhe h_0 befinde; da aber die meisten Observatorien in mehr oder minder ebenem Terrain liegen, so wird es zweckmässig sein, auf die Dichte der über dem Meere gelegenen Erdschichten Rücksicht zu nehmen. Poisson gibt hiefür den folgenden Ausdruck:

$$g = g'\left\{1 - \frac{2h_0}{(a)} + \frac{3}{2}\,\frac{h_0}{(a)}\,\frac{\delta}{\Delta}\right\},$$

in welchem Ausdrucke δ die Dichte des Erdkörpers an seiner Oberfläche, Δ seine mittlere Dichte vorstellt; für das Verhältniss beider Zahlen kann man nach Chisholm:

$$\frac{\delta}{\Delta}=\frac{5}{11},$$

annehmen; mit diesen Zahlen erhält man, wenn h_0 in Metern angesetzt gedacht ist, und das Product dieser Grösse in e^2 übergangen wird, den Ausdruck:

$$g=g'\{1-\overline{(3\cdot31533-10)}\,h_0\}. \tag{13}$$

Vereinigt man die Resultate der Gleichungen 12) und 13), so findet sich, wenn man wieder die zweiten Potenzen der kleinen Correctionsgrössen übergeht, mit mehr als ausreichender Genauigkeit:

$$\frac{(g)}{g}=1+\overline{(7\cdot411468-10)}\cos2\varphi+\overline{(3\cdot31533-10)}\,h_0. \tag{14}$$

Hiemit ist also die Bedeutung der Grösse $L(1+\xi)$ in allen ihren Theilen klargelegt, und es wird nur erübrigen, die Theilresultate zusammenzufassen und die numerischen Werthe von q und (ρ_0) einzuführen; für die letzteren sollen Regnault's Bestimmungen als massgebend betrachtet werden. Derselbe findet als Gewicht eines Liters trockener Luft unter $0\cdot76^{\mathrm{m}}$ Quecksilberdruck im 45. Parallel bei 0° Temperatur am Meeresniveau:

$$(\rho_0)=1\cdot292743 \text{ Gramm},$$

als Gewicht für einen Liter Quecksilber unter denselben Bedingungen:

$$q=13595\cdot93 \text{ Gramm.}$$

Hieraus resultirt, den Meter als Einheit genommen:

$$\log\left[\frac{q}{(\rho_0)}\,0\cdot76\right]=3\cdot902711. \tag{15}$$

Vereinigt man nun die Resultate aus den Gleichungen 9)*, 14) und 15), und übergeht wieder die unmerklichen Producte, die aus den zweiten Potenzen der kleinen Correctionsglieder entstehen, so erhält man schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}\log L&=7\cdot098068-10\\ \xi&=\overline{(7\cdot772049-10)}\cos2\varphi+\overline{(7\cdot222350-10)}\,(1+\cos2\varphi)\cos2A+\overline{(2\cdot6981-10)}\,h_0.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Durch diese Form erscheint die Abtrennung der Grösse ξ erklärt, indem L als constanter Hapttheil auftritt, während ξ mit der Polhöhe, dem Azimuthe und der Meereshöhe des Beobachtungsortes variabel erscheint; es wird daher die Refraction, wenn auch innerhalb sehr mässiger Grenzen von der Polhöhe, der Meereshöhe des Beobachtungsortes und dem Azimuthe abhängig sein. Der Coëfficient von h_0, wobei h_0 die Meereshöhe in Metern darstellt, ist sehr klein und gibt eben nur merkliches für sehr bedeutende Erhebungen, die kaum bei Observatorien in Betracht kommen.

§. 4. Über die in der vorliegenden Refractionstheorie angenommene Constitution der Atmosphäre.

Um den Factor:

$$\frac{\partial\{x(1+mt)\}}{x},$$

der Gleichung 7) des dritten Abschnittes entwickeln zu können, bedarf es der Kenntniss des Zusammenhanges zwischen x und t. In dieser Forderung liegt die Hauptschwierigkeit der Theorie der Refraction, und die von verschiedenen Autoren zu verschiedenen Zeiten aufgestellten genaueren Theorien unterscheiden sich fast nur in Bezug auf die hierüber gemachten Annahmen, die jedoch in sehr differenter Weise sich den bekannten

Thatsachen anschliessen; die Unterschiede zwischen den gemachten Annahmen und den hiefür aus den Beobachtungen folgenden Resultaten sind oft ganz beträchtlich, doch kann fast stets innerhalb der den Beobachtungen zugänglichen, nicht allzu grossen Zenithdistanzen die astronomische Refraction durch geeignete Bestimmung der dem Probleme zu Grunde gelegten Parameter sehr befriedigend dargestellt werden; denn wie schon oben bei der Eingangs versuchten näherungsweisen Integration bemerkt wurde, ist das dort gewonnene Resultat fast unabhängig von der Constitution der oberen Luftschichten, und wird sich dieser Umstand selbst für noch weiter gehende Entwicklungen in der Folge bestätigen; in der That sind die Bessel'schen Annahmen über die Temperaturverhältnisse selbst in den unteren Luftschichten ausserordentlich fehlerhaft, doch der strenge Anschluss der hieraus abgeleiteten Refractionstafeln an die Beobachtungen selbst bis zu Zenithdistanzen von 85° hat dieselben stets den gebührenden Platz behalten lassen, und es sind fast allein diese Tafeln bis auf die neueste Zeit in Gebrauch geblieben. Bei dieser Sachlage scheint es wohl zulässig, eine Untersuchung in dem Sinne durchzuführen, dass man die Temperaturverhältnisse in der Atmosphäre in eine analytische Form bringt, die sich einerseits von den beobachteten Thatsachen nicht allzu weit entfernt, andererseits aber die grossen Complicationen, welche die Integration der Differentialgleichung der Refraction in den meisten Theorien bietet und den schliesslichen Rechnungsmechanismus schwerfällig gestaltet, möglichst aus dem Wege räumt. Allerdings wird zunächst die Aufgabe in der einfacheren Form behandelt werden, indem vorerst die durchschnittlichen Temperaturverhältnisse in Betracht gezogen werden sollen; auf jene hauptsächlich in täglicher und in zweiter Linie in jährlicher Periode auftretenden Abweichungen von diesem Durchschnittsverhältnisse wird erst weiter unten eingegangen werden.

Würde die Temperatur der Luft in allen Höhen die gleiche sein, so könnte nach der bekannten Theorie der Gase die Berechnung der Dichte und des Brechungsindex der Luft in den verschiedenen Schichten mit hinreichender Annäherung ausgeführt werden; da aber die Temperatur mit der Höhe im Allgemeinen abnimmt, und vorerst keine Möglichkeit vorhanden ist, diese Abnahme theoretisch zu erschliessen, so ist man genöthigt, auf die unmittelbaren Beobachtungen zurückzugreifen und aus diesen in empirischer Weise die gesetzmässige Temperaturvertheilung zu ermitteln. Aber auch diesem letzteren Wege stellen sich beträchtliche Schwierigkeiten und Hindernisse entgegen; zunächst ist uns nur ein kleiner Bruchtheil der Atmosphäre zugänglich: die grösste Erhebung über die Erdoberfläche, welche Glaisher durch Ballonfahrten erreicht hat, beträgt etwa 8 bis 9 Kilometer, während man zufolge der Dämmerungserscheinungen die Höhe der Atmosphäre, so weit derselben eine merklich reflectirende, somit auch brechende Kraft zukommt, in minimaler Annahme auf 100 Kilometer veranschlagen muss, und das Aufleuchten der Sternschnuppen auf eine Ausdehnung von 500 Kilometer Höhe und darüber hinweist; ferner hat man als brauchbares Material eigentlich nur die relativ spärlichen Resultate der Ballonfahrten zur Verfügung, da die aus den Bergstationen hiefür abzuleitenden Zahlen bei relativ geringen Niveaudifferenzen durch locale Störungen und Bodenstrahlungen wohl allzu sehr beeinflusst sind.

Es stellt sich nunmehr die Aufgabe, aus den eben erwähnten, durch die Ballonfahrten gelieferten Beobachtungen das Gesetz über den Zusammenhang zwischen der Erhebung und der Temperatur abzuleiten; bei der Vielheit der möglichen Formen tritt hier eine Unbestimmtheit auf, nämlich welche Wahl für den analytischen Ausdruck zu treffen sei; gerade aber in diesem Punkte kann durch entsprechende Wahl der zu Grunde gelegten Function sehr förderliches geleistet werden. Im Allgemeinen ist man in den Naturwissenschaften geneigt, sobald man einer theoretischen Grundlage entbehrt, für solche unbekannte Functionen algebraische Formen vorauszusetzen, die nach Potenzen der einen Variabeln fortschreiten, um sich bei der Anwendung auf wenige Anfangsglieder dieser Reihe zu beschränken. So nützlich im Allgemeinen eine solche auf den Taylor'schen Satz gegründete Entwicklung sein kann, so sehr muss man doch vor derselben warnen, besonders wenn durch die Natur des Problems die assymptotische Annäherung an einen Grenzwerth erwartet werden darf, denn in diesen Fällen wird die eben besprochene Function bei der Mitnahme weniger Anfangsglieder keine genügenden Resultate liefern, daher der empirischen Bestimmung einer grossen Zahl von Parametern, deren Ermittlung in solchen Fällen mit der steigenden Anzahl an Unsicherheit zunimmt, bedürfen, um nur

halbwegs innerhalb eines weiteren Gebietes sich den Resultaten der Beobachtungen anzuschliessen. Es wird deshalb dem vorliegenden Zweck sehr wenig entsprechen, wie dies so häufig geschieht, einen linearen Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Erhebung anzunehmen, etwa in der Form:

$$t = t_0 + ah,$$

in welchem Ausdrucke, analog wie früher, t_0 die Temperatur der untersten Luftschichte, von der aus die Höhe h, bei welcher die Temperatur t stattfindet, gemessen wird, darstellt; a ist ein empirisch zu bestimmender Coëfficient, der so zu wählen ist, dass die in den verschiedenen Höhen beobachteten Temperaturen möglichst gut dargestellt werden; für a wird stets ein negativer Werth gefunden werden. Wohl gelingt es mit Hilfe dieses Ausdruckes die Beobachtungen, wenigstens für nicht allzu bedeutende Erhebungen, genügend darzustellen, man wird aber diese Form keineswegs als die richtige betrachten können; selbst für uns relativ leicht zugängliche Höhen zeigt sich mit grosser Bestimmtheit, dass die Temperaturabnahme mit der Zunahme der Erhebung sich verlangsamt, dass also der Werth von a mit der Höhe abnimmt. Man hat daher dem obigen Ausdrucke ein weiteres Glied mit quadratischem Factor hinzugefügt und angenommen:

$$t = t_0 + ah + bh^2,$$

in welchem Ausdrucke b, durch die Beobachtungen bestimmt, stets einen positiven Werth erhält. Diese Form hat bereits die nöthige Schmiegsamkeit, um sich den Beobachtungen anzuschliessen, und es gelingt in der That durch passende Wahl für die beiden Parameter a und b das vorgelegte Beobachtungsmaterial in genügender Weise darzustellen, so dass man kaum Veranlassung hätte, die eben hingeschriebene Form zu verlassen, wenn man Temperaturen innerhalb einer Erhebung von nur einigen Kilometern in Betracht ziehen wollte. Will man aber Schlüsse ziehen auf die Temperaturen in weit höheren Luftschichten, dann wird man von diesen Formeln abgehen müssen; wären nämlich diese Temperaturen bekannt, so könnte man allenfalls durch weitere Hinzufügung von mit h^3, h^4,... multiplicirten Gliedern wohl sich wieder den Beobachtungen in genügender Weise anschliessen, aber im vorliegenden Falle fehlt das hiezu nothwendige Beobachtungsmaterial und ist auch dessen Beschaffung kaum zu erwarten. Dass die zuletzt hingeschriebene Formel in der That für bedeutende Erhebungen ungenügend sein muss, lehrt die folgende Betrachtung: Ist a negativ und b positiv, wie dies thatsächlich der Fall ist, so wird sich für h ein positiver Werth angeben lassen, welcher der Gleichung:

$$a + 2bh = 0,$$

genügt; für diesen Werth von h wird die Temperatur der benachbarten Luftschichten constant; für grössere Werthe von h wird dann die Temperatur mit der Erhebung zunehmen, und für den Werth von h, der aus Gleichung:

$$a + bh = 0,$$

folgt, wird t gleich der Temperatur an der Erdoberfläche, Folgerungen, die wohl die gewählte Form für die höchsten Luftschichten als unzulässig zurückweisen lassen. Anderseits kann man allerdings auch, wenn b genügend klein ist, leicht für t auf Temperaturen hingeführt werden, die den absoluten Nullpunkt erreichen; in der That führen zahlreiche Annahmen über die Constitution der Atmosphäre auf derartige Werthe, und man hat sich für dieselben entschlossen, an jene Stelle die Grenze der Atmosphäre zu setzen; dass eine derartige Grenzbestimmung für die Höhe der Atmosphäre absolut keinen Werth hat, ja sogar eine solche numerisch falsche Angabe als schädlich bezeichnet werden muss, ist klar, denn einerseits gründet sich dieselbe auf falsche Annahmen über die Constitution der Atmosphäre und anderseits auf die Realität des absoluten Nullpunktes, dessen Existenz und Bestimmung theilweise auch auf die bereits gerügte Ausdehnung der für beschränkte Intervalle geltenden linearen Verhältnisse auf die Grenzfälle sich gründet.

Wollen wir daher für die Temperaturvertheilung in den höheren Schichten der Atmosphäre bessere Anhaltspunkte haben, so müssen wir auf Formen Bedacht nehmen, die von diesen eben auseinandergesetzten Nachtheilen frei sind; die Analyse bietet uns deren in unendlicher Mannigfaltigkeit dar, und da die Theorie

die analytische Form uns zu liefern bislang versagt, so wird man auf Hypothesen über dieselben hingedrängt, deren Berechtigung oder Fehlerhaftigkeit a posteriori an den Beobachtungen geprüft werden muss. Ich habe meine Theorie der Refraction auf die Voraussetzung aufgebaut, dass die durchschnittliche Temperaturänderung der Dichteänderung proportional sei; diese Annahme ist zwar nicht völlig grundlos, [1] doch erscheint mir deren theoretische Begründung so zweifelhaft und unsicher, dass ich diese Voraussetzung vorerst nur als Hypothese aufgefasst sehen möchte, deren Berechtigung allerdings durch die weiter folgenden Auseinandersetzungen, welche den nahen Anschluss an die Beobachtungen erweisen, theilweise gerechtfertigt erscheint. Diese Hypothese setzt voraus, dass nur die mittleren Verhältnisse, wie dieselben bei heiterem, also für astronomische Beobachtungen geeignetem Himmel stattfinden, dargestellt werden sollen und starke Störungen, wie dieselben z. B. bei Niederschlagsbildungen gewiss eintreten, nicht vorhanden seien. Kleidet man die eben aufgestellte Hypothese in eine analytische Form und bezeichnet mit t die Temperatur, mit ρ die Luftdichte, so wird dieselbe definirt sein durch:

$$\frac{\partial t}{\partial \rho} = \varepsilon, \qquad 1)$$

in welchem Ausdrucke ε eine Unbekannte darstellt, deren Werth zunächst so zu bestimmen wäre, dass den Temperaturbeobachtungen, welche bei den Ballonfahrten erhalten wurden, möglichst genügt wird. Integrirt man die Gleichung 1), so ergibt sich, mit C die Integrationsconstante bezeichnend, zunächst:

$$t = \varepsilon\rho + C, \qquad 2)$$

Bezeichnet man mit t_0 und ρ_0 die diesbezüglichen für die unterste Luftschichte geltenden Werthe, so muss auch die Gleichung:

$$t_0 = \varepsilon\rho_0 + C \qquad 3)$$

bestehen; eliminirt man ε aus den Gleichungen 2) und 3), so resultirt die Form:

$$t = C + (t_0 - C)\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad 4)$$

in welcher Gleichung C so zu bestimmen wäre, dass den in verschiedenen Höhen beobachteten Temperaturen möglichst genügt wird. Dass diese Form der Wahrheit sehr nahe kommen wird, kann sofort daraus erschlossen werden, dass J. Herschel und Mendelejew in empirischer Weise festgestellt haben, die Temperatur ändere sich der Luftdrucksänderung sehr nahe proportional; diese letztere aber wird in den allgemeinen Umrissen der Änderung der Dichte beiläufig proportional sein. Um zu zeigen, wie nahe sich die von mir aufgestellte Hypothese den vorhandenen Beobachtungen anschliesst, führe ich hier die Bestimmung des Werthes von C an, wie sich derselbe aus der Glaisher'schen Ballonfahrt am 5. September 1862 ergibt, bei welcher die enorme Höhe von 29.000 englischen Fussen erreicht wurde, und gebe die Vergleichung der Beobachtungsresultate in den verschiedenen Höhen mit den Resultaten aus der obigen Formel. Setzt man $C = -40°4$ C. und $t_0 = 11°2$ C., so ergibt sich die folgende Tabelle, in welcher die angesetzten Beobachtungszahlen aus Mendelejew's Abhandlung über die Temperatur in den höheren Luftschichten entlehnt sind:

[1] Nach Abfassung dieses Manuscriptes bin ich zur Kenntniss gelangt, dass Dr. J. Maurer in dem Mai-Heft 1886 der meteorologischen Zeitschrift in eleganter Weise zeigt, unter welchen theoretischen Voraussetzungen man zu der von mir („Über den Zusammenhang der Refraction mit der Temperaturvertheilung in der Atmosphäre", Beilage zum Mai-Heft 1886 der meteorol. Zeitschrift) bereits publicirten, weiter unten zur Entwicklung kommenden Formel 4) gelangen kann; ich war übrigens auf ganz anderem Wege zu diesem Resultate geführt worden.

Beob. Luftdruck	Beob. Temperatur	Berechn. Temperatur	Beob.—Rechn.
27·5 engl. Zoll	+11°5 Cels.	+11°2 Cels.	+0°3
25·0 „	+ 7·2 „	+ 7·2 „	0·0
22·5 „	+ 2·9 „	+ 3·1 „	—0·2
20·0 „	— 0·9 „	— 1·2 „	+0·3
17·5 „	— 5·4 „	— 5·5 „	+0·1
15·0 „	—10·1 „	— 9·9 „	—0·2
12·5 „	—14·4 „	—14·6 „	+0·2.

Man sieht daher, dass die Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und der supponirten Hypothese eine sehr befriedigende ist, und in der That geben verschiedene ähnliche Beobachtungsreihen kaum minder befriedigende Resultate, so lange nicht Wolkenschichten oder Gebiete starker Niederschläge bei der Ballonfahrt durchsetzt werden. Ich habe im Mittel aus den von Gay-Lussac, Welsh und Glaisher erhaltenen Beobachtungen für C in verhältnissmässig guter Übereinstimmung den Werth —45° C. gefunden; Hann hat auf Grundlage der Mendelejew'schen Formeln auch für C ganz gut übereinstimmende Werthe aus den Resultaten der Bergstationen erhalten, die aber doch für C etwas niedrigere Werthe ergaben. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass bei den Ballonfahrten möglicherweise die niederen Temperaturen in dem Sinne beeinflusst sein können, dass dieselben etwas zu hoch gefunden werden, und auf die etwas niedereren Zahlen, die Hann gefunden hat, möchte ich für C den Werth:

$$C = -50° \text{ Celsius},$$

ansetzen.

Es unterliegt daher keinem berechtigten Zweifel, dass durch die aufgestellte Hypothese, sofern man die in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche localen Störungen unterworfenen Temperaturverhältnisse ausser Acht lässt, für die ersten 10 Kilometer Höhe bei Abwesenheit von Niederschlagsschichten ein sehr einfaches Gesetz der Temperaturvertheilung in der Atmosphäre gefunden ist; da aber innerhalb dieser Grenzen wohl auch mit Hilfe der Formel: $t = t_0 + ah + bh^2$ ein eben so genügender Anschluss erreicht werden kann, so fragt es sich nur, ob man nicht für die höheren Luftschichten durch die obige Formel, ähnlich wie früher, auf mehr oder minder widersinnige Resultate geführt wird.

Zunächst ist es offenbar, dass sich die Temperatur mit der Erhebung stetig vermindere, und zwar in einem immer mehr und mehr verlangsamten Maasse; für den Grenzfall $p : p_0 = 0$, welcher Werth bei der Atmosphärengrenze nahe erreicht sein wird, findet sich $t = C$, d. h. für die Grenze der Atmosphäre hätte man etwa die Temperatur —50° C. anzunehmen, welche Temperatur wohl als zu hoch bezeichnet werden kann; doch schätzt Fourier — allerdings auf nicht völlig bindenden theoretischen Beobachtungen fussend — die Temperatur des Weltraumes auf —50° bis —60°, ein Werth, welcher sich nicht sehr wesentlich von dem für C angenommenen Werth unterscheidet. In Bezug auf die Temperatur des Weltraumes, wenn es gestattet ist, von einer solchen zu sprechen, haben wir durch die Beobachtungen O. Frölich's werthvolle Anhaltspunkte erhalten; derselbe hat durch Strahlungsversuche mit einer berussten Fläche Resultate erhalten, welche, so lange man das Gebiet des unmittelbar Beobachteten nicht verlässt, dahin formulirt werden können, dass der Himmel in der Nähe des Zeniths des Beobachtungsortes eine Strahlung zeige, welche einer schwarzen Fläche von etwa —57° Temperatur gleichkomme, einem Werthe, der zwar mit Fourier's Angaben und mit dem für C gefundenen Werthe in erträglicher Übereinstimmung steht, wenngleich er wohl nur als oberer Grenzwerth betrachtet werden darf, und die Temperatur des Weltraumes wahrscheinlich wesentlich niedriger, unter —100°, anzunehmen sein wird. Diese Betrachtungen lehren, dass zwar die durch die obige Formel für die Grenze der Atmosphäre gefundenen Temperaturangaben zu hoch sein werden, aber nicht in so bedeutendem Maasse, dass man nicht innerhalb des Gebietes, in welchem die Atmosphäre eine für unsere Instrumente merklich brechende Kraft besitzt, den eben aufgestellten Ausdruck für die Temperaturverhältnisse der höheren Luftschichten als brauchbaren Näherungsausdruck betrachten dürfte, umsomehr, da für die grössten Zenithdistanzen selbst

sehr fehlerhafte Annahmen über die Temperaturverhältnisse in den oberen Luftschichten auf den Betrag der Refraction fast ohne Einfluss sind.

Der Differentialausdruck 1) und die daraus abgeleitete analytische Form 4) genügt also im grossen Ganzen den bestehenden Verhältnissen, doch werden in demselben die bereits erwähnten Störungen in der Nähe des Erdbodens vorerst gar nicht berücksichtigt; ehe ich somit denselben der ferneren Rechnung zu Grunde lege, werde ich ihm eine solche Form geben, dass an seiner allgemeinen Giltigkeit nicht gezweifelt werden kann, so lange man annimmt, dass in der Atmosphäre kein labiles Gleichgewicht vorhanden ist, also stets die oberen Schichten weniger dicht als die unteren sind.

Ich setze:

$$\frac{\partial t}{\partial \rho} = \varepsilon + \Sigma k' \rho^{\sigma-1}, \tag{5}$$

in welchem Ausdrucke unter dem Summenzeichen Glieder zu verstehen sind, die aus dem Producte des näher zu bestimmenden Factors k' und einem Potenzausdrucke der Dichte ρ bestehen, dessen Exponent $(\sigma-1)$ wie der Factor k' für die verschiedenen Glieder des Summenausdruckes beliebige Werthe annehmen kann. Lässt man noch die Erweiterung gelten, dass sowohl k' als auch σ Functionen des atmosphärischen Zustandes und der Beobachtungslocalität seien, die überdies mit der Zeit veränderlich gedacht werden können, so wird man zugeben müssen, dass ein Ausdruck von der eben gewählten Form stets aufgestellt werden kann, um den thatsächlichen Verhältnissen der Atmosphäre mit einer beliebigen Annäherung zu genügen. Indem ich also diese Form meiner Theorie der Refraction zu Grunde lege, ist die mathematische Behandlung derselben eine allgemeine und kann unter der Einschränkung, dass die Summenglieder zusammengenommen klein seien, also eine Entwicklung nach steigenden Potenzen dieser letzteren auf convergente Ausdrücke führt, als gemeinsame Grundlage für eine beliebige Annahme über die Constitution der Atmosphäre gelten. Die eben gemachte Einschränkung ist aber für die Verhältnisse, wie sie die Erde bietet, völlig irrelevant, da die vorangegangenen Betrachtungen lehren, dass das erste durch ε dargestellte Glied in 5) den vorhandenen Verhältnissen der Hauptsache nach genügt, also in der That die Summenglieder nur Correctionsgrössen von geringem Betrage hinzufügen. Allerdings muss man sich aber gegenwärtig halten, dass damit nicht gesagt sein soll, dass die durch die folgende Theorie ermittelte Refraction mit einem beliebigen Grade der Annäherung erhalten werden könne, denn abgesehen von den Mängeln und Unsicherheiten, die in der Differentialgleichung für die Refraction selbst bestehen, und auf welche bereits oben hingewiesen wurde, fehlt uns eben bei der unvollkommenen Kenntniss der Temperaturverhältnisse in der Atmosphäre die Möglichkeit, die verschiedenen k' und σ Grössen mit dem nöthigen Grade von Sicherheit zu bestimmen.

Die Integration der Gleichung 5) gibt:

$$t = \varepsilon\rho + \Sigma \frac{k'}{\sigma} \rho^{\sigma} + C.$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich wie oben; für $\rho = \rho_0$ muss $t = t_0$ werden, wenn mit ρ_0 und t_0 die am Beobachtungsorte stattfindende Dichte und Temperatur bezeichnet werden soll; es ist also auch:

$$t_0 = \varepsilon\rho_0 + \Sigma \frac{k'}{\sigma} \rho_0^{\sigma} + C.$$

Eliminirt man wieder wie früher ε und setzt der Kürze halber:

$$\frac{k'}{\sigma} \rho_0^{\sigma} = k,$$

welcher Coëfficient für ein gegebenes Glied des Summenausdruckes für einen speciellen Fall als bekannt vorausgesetzt werden kann, und führt wie oben x durch:

$$x = \frac{\rho}{\rho_0},$$

ein, so findet man leicht den gesuchten Ausdruck:

$$t = (t_0 - C)x + C + \Sigma k(x^\sigma - x). \tag{6}$$

Nach den gemachten Bemerkungen unterliegt es keinem Zweifel, dass die Allgemeinheit dieses Ausdruckes nichts zu wünschen übrig lässt. Über die Bedeutung der verschiedenen k und σ Grössen soll vorerst nichts Näheres bestimmt werden, indem erst nach Vergleichung der Theorie der Refraction mit den Beobachtungen in Verbindung mit anderweitig feststehenden meteorologischen Thatsachen die Hilfsmittel angegeben werden können, von Fall zu Fall auf die Bestimmung der numerischen Werthe einzugehen. Die beiden ersten Glieder der obigen Gleichung sind mit dem früher gefundenen Ausdruck identisch; wir wissen schon, dass C sehr nahe dem Werthe $-50°$ der Celsiusscala gleichkommt, und es ist klar, dass allfällige Fehler in diesen Annahmen durch geeignete Bestimmung in den Summengliedern unschädlich gemacht werden können.

Man kann nun daran gehen, den Zusammenhang zwischen s und x, welcher durch die Differentialgleichung 7) des Abschnittes 3 (pag. 5) gegeben ist, vollständig der hier gewählten Form für die Constitution der Atmosphäre entsprechend zu entwickeln.

Zunächst findet sich:

$$x(1+mt) = x + m(t_0 - C)x^2 + mCx + m\Sigma k(x^{\sigma+1} - x^2).$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach x und dividirt nachher durch x, so erhält man:

$$\frac{\partial\{x(1+mt)\}}{x} = (1+mC)\frac{\partial x}{x} + 2m(t_0 - C)\,\partial x + m\Sigma k[(\sigma+1)x^{\sigma-1} - 2]\,\partial x,$$

und wenn man abkürzend setzt:

$$\left.\begin{aligned} L(1+\xi)(1+mC) &= B \\ 2L(1+\xi)(t_0 - C)m &= \beta \\ mL(1+\xi) &= \lambda, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

erhält die Gleichung 7) des dritten Abschnittes die Gestalt:

$$-\partial s = B\frac{\partial x}{x} + \beta\,\partial x + \lambda\Sigma k[(\sigma+1)x^{\sigma-1} - 2]\,\partial x,$$

deren Integral sich aber leicht finden lässt, nämlich:

$$-s = B \log\text{nat}\, x + \beta x + \lambda\Sigma k\left[\frac{\sigma+1}{\sigma}x^\sigma - 2x\right] + J.$$

Die Integrationsconstante J muss offenbar so bestimmt werden, dass für $x = 1$, also die Dichte an der Erdoberfläche $s = 0$ wird, also ist auch:

$$0 = \beta + \lambda\Sigma k\left[\frac{\sigma+1}{\sigma} - 2\right] + J.$$

Die Subtraction dieses Ausdruckes von dem obigen Integrationsresultat ergibt daher:

$$s = -B\log\text{nat}\, x + \beta(1-x) - \lambda\Sigma k\left[\frac{\sigma-1}{\sigma} - 2x + \frac{\sigma+1}{\sigma}x^\sigma\right],$$

womit der letzte die Integration der Differentialgleichung der Refraction vorbereitende Schritt ausgeführt erscheint. Man wird zu beachten haben, dass das letzte Glied die Correctionsglieder, welche die oben aufgestellte Annahme über die Constitution der Atmosphäre bedarf, enthält; ich will dieselben kurz mit P bezeichnen und daher schreiben:

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda\Sigma k\left[\frac{\sigma-1}{\sigma} - 2x + \frac{\sigma+1}{\sigma}x^\sigma\right] \\ s &= -B\log\text{nat}\, x + \beta(1-x) - P, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

welcher Ausdruck für s in die Differentialgleichung der Refraction [Gleichung 8) des ersten Abschnittes] eingeführt, den rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdruck nur von der einzigen Variabeln x abhängig macht. Die Integration der vorgelegten Differentialgleichung, welche schon die Form einer Quadratur hat, stösst aber auf mannigfaltige Schwierigkeiten, es sollen daher in dem folgenden Abschnitte einige Reductionsformeln für die auftretenden Integrale zunächst in Betracht gezogen werden, um dann die ferneren Entwicklungen möglichst einfach zu gestalten.

§. 5. Formeln zur Reduction der auftretenden Integrale auf Entwicklung einiger Gammafunctionen.

Die in den nachfolgenden Entwicklungen zur Behandlung kommenden bestimmten Integrale lassen sich auf die Form:

$$\int_0^\infty \frac{y^m e^{-ny} \partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{\frac{2r+1}{2}}}, \tag{1}$$

zurückführen, in welcher m und r ganze positive Zahlen vorstellen, e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und n beliebige ganze oder gebrochene Werthe annehmen kann. Die Transformation dieser Form auf Gammafunctionen soll die nächste Aufgabe sein.

Zuerst soll der Fall erledigt werden, wenn m und r die Werthe 0 annehmen. Setzt man:

$$y = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}}, \tag{2}$$

und führt die neue Variable t ein durch:

$$\left.\begin{aligned} n \operatorname{cotg} z^2 + 2nB' y &= 2B' t^2 \\ ny &= t^2 - ng^2 \\ \partial y &= \frac{2t}{n} \partial t, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

so wird man unter den gemachten Voraussetzungen über m und r aus 1) ohne Schwierigkeit erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny} \partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{nB'}} \cdot e^{ngg} \int_{g\sqrt{n}}^\infty e^{-tt} \partial t, \tag{4}$$

wodurch die Integration des speciellen Falles der obigen Formel 1) mit Hilfe der unvollständigen Gammafunctionen erreicht ist. Da für diese letztere Hilfstafeln bestehen, so kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden; setzt man der Kürze halber:

$$e^{ngg} \int_{g\sqrt{n}}^\infty e^{-tt} \partial t = \Psi_{(n)}, \tag{5}$$

so kann man auch statt 4) schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny} \partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2B'}} \int_0^\infty \frac{e^{-ny} \partial y}{(g^2 + y)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{nB'}} \Psi_{(n)}. \tag{6}$$

Es stellt sich nun die Aufgabe, die allgemeine Formel 1) auf die specielle 4) durch geeignete Reductionsformeln zurückzuführen. Vor Allem wird man schreiben dürfen:

$$\int_0^\infty \frac{y^m e^{-ny} \partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{1}{(2B')^{\frac{2r+1}{2}}} \int_0^\infty \frac{y^m e^{-ny} \partial y}{(g^2 + y)^{\frac{2r+1}{2}}}. \tag{7}$$

Differentiirt man den Ausdruck:

$$\frac{y^{m-1}e^{-ny}}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}},$$

nach y, so erhält man leicht:

$$\partial\,\frac{y^{m-1}e^{-ny}}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}} = -\left(\frac{2r-1}{2}\right)\frac{y^{m-1}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} - \frac{ny^{m-1}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}} + \frac{(m-1)y^{m-2}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}}; \qquad 8)$$

multiplicirt man in den beiden letzten Gliedern Zähler und Nenner mit (g^2+y) und vereinigt alles Zusammengehörige, so findet sich zunächst:

$$\frac{ny^m e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = -\,\partial\left\{\frac{y^{m-1}e^{-ny}}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}}\right\} - \frac{y^{m-1}e^{-ny}}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}}\left\{ng^2+\frac{2r-1}{2}-(m-1)\right\}\partial y + \frac{(m-1)g^2y^{m-2}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}};$$

integrirt man unter Berücksichtigung der Grenzen, so findet sich sofort die wichtige Relation:

$$\int_0^\infty \frac{y^m e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = -\left(g^2+\frac{2(r-m)+1}{2n}\right)\int_0^\infty \frac{y^{m-1}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} + (m-1)\frac{g^2}{n}\int_0^\infty \frac{y^{m-2}e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}}, \qquad 9)$$

durch welche man in die Lage gesetzt ist, die Potenzen von y im Zähler herabzumindern, ohne den Exponenten des Nenners zu ändern. Die wiederholte Anwendung von 9) muss demnach unter den gemachten Voraussetzungen Integrale von der einfacheren Form:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} \qquad 10)$$

finden lassen. Eine Ausnahme jedoch wird der Fall $m=1$ bedingen, der in der Reductionsformel auf eine Unbestimmtheit hinführen würde. Setzt man in der Gleichung 8) aber $(m-1)$ der Null gleich und integrirt nachher, so findet sich sofort für den erwähnten Ausnahmefall $(m=1)$:

$$\int_0^\infty \frac{ye^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{1}{ng^{2r-1}} - \left(g^2+\frac{2r-1}{2n}\right)\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}}. \qquad 11)$$

Mit Rücksicht auf die Resultate der Gleichungen 9) und 11) bedarf demnach nur die Form 10) allein weiterer Reductionen, um die Form 1) auf Gammafunctionen zurückzuführen. Kehrt man zu Gleichung 8) zurück und setzt in derselben $m-1=0$, so erhält man:

$$\frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = -\left(\frac{2}{2r-1}\right)\partial\left\{\frac{e^{-ny}}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}}\right\} - \frac{2n}{2r-1}\,\frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}};$$

integrirt man nun und setzt die Grenzen ein, so findet sich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{2}{(2r-1)g^{2r-1}} - \frac{2n}{2r-1}\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r-1}{2}}}, \qquad 12)$$

womit die Möglichkeit geboten ist, durch fortgesetzte Anwendung dieser Reductionsformel den Exponenten des Nenners auf die einfache Quadratwurzel zurückzuführen und hiemit die in 6) auf Gammafunctionen reducirte Form zu erreichen. Mit Hilfe der Formeln 9), 11) und 12) hat also die Reduction der Integrale von der Form 1) auf unvollständige Gammafunctionen, deren numerische Werthe tabulirt sind, keine weiteren Schwierigkeiten. Hilfstafeln dieser Art sind mehrfach veröffentlicht, auf 10 Stellen berechnet findet sich eine

solche als Tafel X im II. Bande meines „Lehrbuches zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten"; dieselbe gibt den numerischen Werth des Integrals

$$\int_0^T e^{-tt}\partial t$$

mit dem Argumente T; um diese Tafel auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, erinnere man sich, dass:

$$\int_0^\infty e^{-tt}\partial t = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ist, es wird also:

$$\int_T^\infty e^{-tt}\partial t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^T e^{-tt}\partial t.$$

Wiewohl also das Problem für den vorliegenden Zweck allseitig gelöst erscheint, so sollen doch noch einige Entwicklungen vorgenommen werden, welche die später noch auszuführenden mehrfachen Reductionen wesentlich erleichtern.

Wendet man nämlich die Reductionsformel 12) so lange an, bis der Exponent des Nenners auf den Werth $^1/_2$ herabgedrückt erscheint, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung 6) (pag. 15):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{2}{(2r-1)g^{2r-1}} - \frac{2^2 n}{(2r-1)(2r-3)g^{2r-3}} + \ldots + \frac{(-1)^r 2^{r+1} n^{\frac{2r-1}{2}}}{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1} \cdot \Psi_{(n)}. \qquad 13)$$

Ist nun die Form:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}(1-e^{-y})^p\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}},$$

vorgelegt, wo p eine beliebige ganze positive Zahl vorstellt, so wird sich auch diese Form leicht auf bereits bekannte Formen zurückführen lassen, wenn man den Potenzausdruck entwickelt. Schreibt man die hiebei auftretenden Binomialcoëfficienten in der bekannten Weise, so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}(1-e^{-y})^p\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \binom{p}{0}\int_0^\infty \frac{e^{-ny}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} - \binom{p}{1}\int_0^\infty \frac{e^{-(n+1)y}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} + \ldots +$$
$$+(-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}\int_0^\infty \frac{e^{-(n+p-1)y}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} + (-1)^p\binom{p}{p}\int_0^\infty \frac{e^{-(n+p)y}\partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}}.$$

Wendet man die in 13) angezeigte Reduction auf alle diese Integrale an, so erhält man, da r für alle in Betracht kommenden Integrale gleich ist, durch die diesbezügliche Entwicklung eine gleiche Anzahl von Gliedern, bei denen überdies die Nenner und bezüglichen Potenzen von 2 für die analogen Glieder in den Zählern gemeinsam sind, da jene von n und p unabhängig erscheinen. Summirt man nun alle analogen Glieder (die den gleichen Factor haben) und bezeichnet, um allgemein vorgehen zu können, die Zähler, die den verschiedenen Reihen von 13) angehören, der Reihe nach mit A_0, A_1, $A_2 \ldots$, so wird im Allgemeinen als Ausdruck des Zählers zu einem gemeinsamen Nenner die Form:

$$\binom{p}{0}A_0 - \binom{p}{1}A_1 + \binom{p}{2}A_2 \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}A_{p-1} + (-1)^p\binom{p}{p}A_p, \qquad 14)$$

erhalten, welcher Ausdruck nichts anderes ist, als der allgemeine Ausdruck für die Anfangsglieder der p^{ten} Differenz der durch A_0, A_1, $A_2 \ldots$ gebildeten Reihe. Gehört nun die Werthreihe A_0, A_1, $A_2 \ldots$ einer arithmetischen Reihe m^{ter} Ordnung an, so wird der Ausdruck 14) stets so lange der Null gleichbleiben müssen, so

lange $p > m$ ist, da ja für eine arithmetische Reihe m^{ter} Ordnung die $(m+1)^{te}$ und die folgenden Differenzreihen der Null gleich sein müssen. Nun gehören in den von der Gammafunction freien Gliedern in 13) die für die verschiedenen n geltenden Zähler bis zum vorletzten Gliede inclusive nur einer arithmetischen Reihe $(r-1)^{ter}$ Ordnung zu; man kann daher behaupten, dass die Relation gilt:

$$p \gtrless r.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ny}(1-e^{-y})^p \partial y}{(g^2+y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{(-1)^r 2^{r+1}}{1.3.5\ldots(2r-1)} \left\{ \binom{p}{0} n^{\frac{2r-1}{2}} \Psi_{(n)} - \binom{p}{1}(n+1)^{\frac{2r-1}{2}} \Psi_{(n+1)} + \binom{p}{2}(n+2)^{\frac{2r-1}{2}} \Psi_{(n+2)} \ldots \right. \qquad 15)$$

In der Folge spielt der specielle Fall $n=1$, $p=r$ die wichtigste Rolle; specialisirt man dem entsprechend die Formel 15) und führt statt g^2 den Ausdruck nach 2) ein, so findet sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}(1-e^{-y})^r \partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2B'y)^{\frac{2r+1}{2}}} = \frac{(-1)^r \sqrt{\frac{2}{B'}}}{1.3.5\ldots(2r-1)B'^r} \left\{ \Psi_{(1)} - \binom{r}{1} 2^{\frac{2r-1}{2}} \Psi_{(2)} + \binom{r}{2} 3^{\frac{2r-1}{2}} \Psi_{(3)} \cdot \quad \cdot \right\}. \qquad 16)$$

Schliesslich führe ich einige der bekannten Reihenausdrücke, die unter Umständen bei der Entwicklung der Gammafunctionen von Nutzen sind, hier kurz an:

$$\int_0^T e^{-tt} \partial t = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{T^5}{5} - \frac{1}{2.3}\frac{T^7}{7} + \ldots \qquad 17)$$

$$\int_T^\infty e^{-tt} \partial t = \frac{e^{-TT}}{2T} \left\{ 1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T^2)^3} + \ldots \right\}; \qquad 18)$$

letztere Reihe gehört in die Kategorie der halbconvergenten Reihen.

§. 6. Entwicklung des Hauptgliedes der Refraction.

Die schon im §. 2 angeführte Differentialgleichung für die Refraction lautet:

$$\partial R = \frac{\alpha(1-s)\sin z\,\partial x}{\{1-2\alpha(1-x)\}\,\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+(2s-s^2)\sin z^2\}^{1/2}}. \qquad 1)$$

In dieser Differentialgleichung ist nun für s die in §. 4 dargestellte Relation 8) (pag. 14) einzuführen; hiedurch ist rechter Hand vom Gleichheitszeichen alles durch Functionen der einen Variablen x ausgedrückt; integrirt man demnach den Ausdruck nach x und setzt die Grenzen 0 und 1 ein, so ist der Ausdruck für die Refraction gefunden. Die Integration würde indessen bei der eben hingeschriebenen Form auf einige Schwierigkeiten stossen, die aber wesentlich vermindert werden können, wenn man einige kleine Glieder ablöst, die im Endresultate wenig ausmachen und schliesslich als Zusatzglieder in Rechnung gebracht werden können.

Vorerst kann man schreiben:

$$\frac{\alpha}{1-2\alpha(1-x)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2(1-2x)}{(1-\alpha)^2} + \ldots, \qquad 2)$$

wobei man mit den angesetzten Gliedern der Reihe ausreicht, da der numerische Werth von $\alpha:(1-\alpha)$, die „Constante der Refraction", klein ist und den Werth einer Bogenminute unter mittleren Temperaturverhältnissen nicht erreicht.

Weiter wird man beachten, da s nothwendig innerhalb der merklich dichten Luftschichten klein sein muss, dass man, ohne mehr als Grössen dritter Ordnung von s zu vernachlässigen, schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(1-s)\sin z}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+(2s-s^2)\sin z^2\}^{1/2}} &= \frac{\sin z}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{1/2}}-\\ &-\frac{s\sin z}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{1/2}}+\\ &+\frac{{}^1/_2\, s^2\sin z^3}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{3/2}}-\\ &-\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad 3)$$

Es wird sich später herausstellen, dass die letzten beiden Glieder in Bezug auf s, wenn $\cos z = 0$ wird (Horizontalrefraction), und der Einfluss der untersten Luftschichten auf die Refration berechnet werden soll [also $(1-x)$ nahe gleich 0 ist], gleicher Ordnung sind, aber nur wenig merkbares hinzufügen; man kann daher die Glieder der nächst höheren Ordnung unbedenklich fortlassen. Vereinigt man die Resultate aus 2) und 3) und übergeht, wie dies gestattet ist, die Producte der kleinen Zusatzglieder ineinander, so erhält man statt 1) die Relation:

$$\partial R = \partial R_1+\partial R_2+\partial R_3+\partial R_4, \qquad 4)$$

wobei gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}\partial R_1 &= +\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\sin z\,\partial x}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{1/2}}\\ \partial R_2 &= +\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{{}^1/_2\, s^2\sin z^3\,\partial x}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{3/2}}\\ \partial R_3 &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{s\sin z\,\partial x}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{1/2}}\\ \partial R_4 &= +\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\frac{(1-2x)\sin z\,\partial x}{\{\cos z^2-2\alpha(1-x)+2s\sin z^2\}^{1/2}}.\end{aligned}\right\}\quad 5)$$

Die letzten beiden Glieder geben für sehr grosse Zenithdistanzen mehrere Zehntheile der Bogensecunden, dR_2 beeinflusst die Refraction bei grossen Zenithdistanzen ebenfalls um einige Zehntel der Bogensecunde und nimmt zudem mit der Verminderung der Zenithdistanz nicht schnell ab, so dass sein Einfluss bei 70° noch 0"2 beträgt. Dieses Glied ist bisher bei den meisten Theorien der Refraction völlig übersehen worden, indem man glaubte, dasselbe werde nur für die grössten Zenithdistanzen merkbar und verschwinde rasch mit der Abnahme derselben. In Nr. 2186, Bd. 92 der „Astron. Nachr.“ habe ich schon eine diesbezügliche Note gegeben.

Das erste Glied bildet den wesentlichen Theil der Refraction, und soll dessen Integration zuerst vorgenommen werden. Setzt man in ∂R_1 für s die Gleichung 8) §. 4, so erhält man:

$$\partial R_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\partial x}{\{\operatorname{cotg} z^2-2B\log\operatorname{nat} x+2\gamma(1-x)-2P\}^{1/2}}, \qquad 6)$$

wobei abkürzend gesetzt ist:

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{\sin z^2}.$$

Das Glied P wird nothwendig klein, da das Gesetz der Temperaturabnahme in den Luftschichten im Allgemeinen durch die angenommene Form sehr nahe dargestellt wird. Entwickelt man daher den Ausdruck 6) nach Potenzen dieser Grösse, so findet sich leicht:

$$\partial R_1 = \partial R_1'+\partial R_1''+\partial R_1'''+\ldots,$$

wobei gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}\partial R'_1 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\partial x}{\{\operatorname{cotg} z^2 - 2B\log\operatorname{nat} x + 2\gamma(1-x)\}^{1/2}}\\ \partial R''_1 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{P\partial x}{\{\operatorname{cotg} z^2 - 2B\log\operatorname{nat} x + 2\gamma(1-x)\}^{3/2}}\\ \partial R'''_1 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{{}^3/_2 P^2\partial x}{\{\operatorname{cotg} z^2 - 2B\log\operatorname{nat} x + 2\gamma(1-x)\}^{5/2}}.\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Die grosse Unsicherheit, die den Werthen von P anhaftet, wird die Entwicklung des Gliedes dR'''_1 kaum mehr nöthig erscheinen lassen; man wird sich daher später mit Vortheil auf das Glied dR''_1 beschränken dürfen, d. h. man berücksichtigt nur die ersten Potenzen der Änderungen der Constitution der Atmosphäre gegen die in dieser Abhandlung gemachte Annahme; es hat aber die Integration der vernachlässigten Glieder nach den in dieser Abhandlung als massgebend angenommenen Principien keine Schwierigkeit, so dass die theoretische Bestimmung der Refraction mit einem beliebigen Grade der Annäherung durchgeführt werden kann, wenn nur die in P auftretenden Coëfficienten gegeben sind.

Das Glied R'_1 nenne ich das Hauptglied der Refraction, und die hiefür erforderliche Integration bildet die Aufgabe dieses Abschnittes. Um nun $\partial R'_1$ auf integrable Formen zurückzuführen, kann man eine neue Variable einführen, die bestimmt erscheint durch:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-y}\\ \log\operatorname{nat} x &= -y\\ \partial x &= -e^{-y}\partial y,\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

und erhält zunächst:

$$\partial R'_1 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{e^{-y}\partial y}{\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\}^{1/2}}. \quad 10)$$

Die Behandlung dieses Ausdruckes 10) ist aber mit Hilfe der im vorangehenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen leicht genug auszuführen, wenn γ im Verhältniss zu B eine kleine Grösse ist, weil dann eine Entwicklung nach den Potenzen von $\gamma : B$ ausgeführt, auf integrable Formen hinführt. In der That sind die Verhältnisse in unserer Athmosphäre so beschaffen, dass diese Form der Entwicklung mit Vortheil angewendet werden könnte, doch wird, wie man sich leicht überzeugen kann, für hohe Temperaturen die Convergenz eine sehr langsame, und man muss wohl für grosse Zenithdistanzen bis zur sechsten Potenz dieses kleinen Moduls vorschreiten, um eine genügende Annäherung zu erhalten. Eine einfache Transformation des Nenners wird aber die Convergenz wesentlich verbessern. Setzt man:

$$B' = B + \gamma f, \quad 11)$$

so ist f vorerst ein willkürlicher, aber constanter Factor; aus Gründen, die später klar hervortreten werden, nehme ich:

$$f = 2(\sqrt{2}-1) = 0\cdot 8284271 \quad 12)$$

an und erhalte so:

$$\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y}) = \operatorname{cotg} z^2 + 2B'y + 2\gamma(1-e^{-y}-fy).$$

Führt man diesen Ausdruck in den Nenner von 10) ein und entwickelt nach Potenzen von $(1-e^{-y}-fy)$ und zeigt die erforderlichen Integrationen an, so wird, indem man die Grenzen der obigen Substitution 9) entsprechend bestimmt:

$$R'_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{1/2}} - \gamma\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y}-fy)e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{3/2}} + \frac{1.3}{1.2}\gamma^2\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y}-fy)^2 e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y)^{5/2}} - \ldots\right\}, \quad 13)$$

mit welchen Gliedern man ausreicht, wenn man die Horizontalrefraction, so weit es das Hauptglied betrifft, bei nicht allzuhohen Temperaturen auf 0"1 theoretisch erhalten will. Ich werde diese drei Glieder der Reihe nach mit *I*, *II* und *III* bezeichnen, so dass

$$R_1'' = \frac{\alpha}{1-\alpha}(I+II+III)$$

ist, und die Integration dieser einzelnen Glieder vornehmen.

Für *I* findet sich nach Formel 6) §. 5 sofort:

$$I = \sqrt{\frac{2}{B'}}\,\Psi_{(1)}$$

oder, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{(1)} &= \Phi_0\\ I &= \sqrt{\frac{2}{B'}}\,\Phi_0.\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Der Logarithmus von Φ_0 findet sich in der Tafel 1 mit dem Argumente:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}},$$

tabulirt; die Berechnung bietet keine Schwierigkeit, denn nach Formel 5) §. 5 (pag. 15) ist:

$$\Phi_0 = e^{gg}\int_g^\infty e^{-tt}\partial t;$$

g wird für Zenithdistanzen, die grösser als 90° sind, negativ; um demnach auch diese berechnen zu können, ist für die untere Grenze von g der Werth $-0\cdot5$ angesetzt. Um der Tafel die möglichste Bequemlichkeit und Kürze zu geben, ist g als Argument zwischen den Grenzen $-0\cdot5$ und $+1\cdot0$ angenommen, für die weiteren Werthe von g gilt als Argument $\log g$ zwischen den Grenzen 0 und $1\cdot0$. Die Grenzen weiter auszudehnen erschien überflüssig, weil die Bestimmung der Refraction in jenen Fällen, wo $g > 10$ wird, bequemer nach anderen Formeln vorgenommen werden kann, die später betrachtet werden sollen. Zum Schlusse finden sich die Ergänzungstafeln für die Argumente $-0\cdot6$ bis $-0\cdot5$, um auch die Refractionsbeträge für Zenithdistanzen, die wesentlich grösser als 90° sind, berechnen zu können.

Für *II* findet sich:

$$-II = \gamma\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2B'y)^{3/2}} - f\gamma\int_0^\infty \frac{y\,e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2B'y)^{3/2}}.$$

Die Formel 16) §. 5 gibt aber für den ersten Theil sofort:

$$\gamma\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2B'y)^{3/2}} = \frac{\gamma}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,\{2^{1/2}\Psi_{(2)}-\Psi_{(1)}\}.$$

Für den zweiten Theil erhält man ohne Schwierigkeit nach 11) und 13) §. 5:

$$-\gamma f\frac{1}{(2B')^{3/2}}\int_0^\infty \frac{ye^{-y}\partial y}{(g^2+y)^{3/2}} = -\frac{\gamma}{B'}f\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{\left(g^2+\frac{1}{2}\right)\Psi_{(1)}-\frac{g}{2}\right\}.$$

Setzt man also:

$$\Phi_1 = \left\{\left(g^2+\frac{1}{2}\right)\Psi_{(1)}-\frac{g}{2}\right\}f-\{2^{1/2}\Psi_{(2)}-\Psi_{(1)}\}, \quad 15)$$

so lässt sich $\log \Phi_1$ mit dem Argumente:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}},$$

tabuliren, und diese Werthe sind neben jenen von $\log \Phi_0$, welche beide dasselbe Argument haben, in die Tafel I aufgenommen. Über die Werthe und die Grenzen des Argumentes g gelten die früher gemachten Bemerkungen. Es ist jetzt ersichtlich, wesshalb oben f der Werth $2(\sqrt{2}-1)$ zugeschrieben wurde, denn für die Grenze $g = 0$ $(z = 90°)$ ist $\Psi_{(2)} = \Psi_{(1)}$ und es wird Φ_1 für die Horizontalrefraction der Null gleich und erreicht daher für andere Zenithdistanzen nur sehr mässige Werthe, so dass dem ersten mit Hilfe von Φ_0 berechneten Gliede selbst bei grossen Zenithdistanzen nur wenige Bogensecunden zuzulegen sind. Auf dieser Wahl für f beruht der Näherungsausdruck, den ich in Nr. 2135 Bd. 89 der „Astron. Nachr." publicirt habe. In der That vernachlässigt man durch diesen Ausdruck in allen Zenithdistanzen nur ganz geringe Grössen, die durch die Beobachtungen kaum mit Sicherheit verbürgt werden können; die Variation von γ mit der Zenithdistanz ist in grossen Zenithdistanzen ($\sin z$ nahe gleich 1) sehr gering, da gesetzt wurde:

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{\sin z^2};$$

für kleine Zenithdistanzen wird aber der Einfluss von γ auf die Refraction fasst ganz unmerklich. Das zweite und dritte der Hauptglieder der Refraction gibt nur für sehr grosse Zenithdistanzen, für welche $\sin z$ nahe der Einheit gleich ist, merkliche Werthe. Das zweite Glied erscheint mit γ, das dritte mit γ^2 multiplicirt; für grosse Zenithdistanzen wird aber γ sehr nahe der Null gleich, wenn $\beta = \alpha$ ist. Da indessen α von der Temperatur und dem Barometerstand abhängig ist, so wird bei geeigneter Wahl für die Barometer- und Thermometerstände diese Gleichheit stets bewirkt werden können. In diesem Falle der Gleichheit ist die in Nr. 2135 der "Astron. Nachr." publicirte einfache Form der Refraction nahezu völlig streng; es wird nach derselben der bezeichnete Fall eintreten bei $-12°$ Celsius und einem Barometerstande von 760^{mm}. Bei höheren Temperaturen sind die Abweichungen etwas merkbarer, bleiben aber selbst für sehr grosse Zenithdistanzen nur auf sehr mässige Werthe beschränkt, so dass in der That, wenn es nicht auf die grösste Genauigkeit ankommt, die Refraction durch eine unvollständige Gammafunction allein dargesellt werden kann.

Nach diesen Bemerkungen über den bezeichneten Näherungsausdruck kehre ich zu der Gleichung 15) zurück; dieselbe gibt für die Bestimmung von II den Werth:

$$II = \frac{\gamma}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,\Phi_1. \tag{16}$$

Die Reduction von III gestaltet sich etwas weitläufiger, doch ist die Ermittlung nicht schwierig und die Berechnung mittelst einer Hilfstafel sehr leicht. Es ist:

$$III = \frac{1.3}{2^4}\left(\frac{\gamma}{B'}\right)^2\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y})^2 e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} - 2f\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y})\,y e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} + f^2\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}}\right\}.$$

Die Anwendung der Formel 15) §. 5 gibt sofort für das erste Integral:

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-y})^2 e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} = \frac{2^3}{3}\left\{\Psi_{(1)} - 2.2^{3/2}\,\Psi_{(2)} + 3^{3/2}\Psi_{(3)}\right\}. \tag{17}$$

Für das zweite Integral erhält man unter Benützung der Formeln 11) und 13) §. 5:

$$\int_0^\infty \frac{y e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} - \int_0^\infty \frac{y e^{-2y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} = -\frac{2^3}{3}\left\{\frac{g}{2} + \Psi_{(1)}\left[g^2+\frac{3}{2}\right] - 2^{3/2}\Psi_{(2)}\left[g^2+\frac{3}{4}\right]\right\}. \tag{18}$$

Für das dritte Integral gibt die Formel 9) §. 5 sofort:

$$\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} = -\left(g^2+\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty \frac{y e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}} + g^2\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,\partial y}{(g^2+y)^{5/2}},$$

und mit Benützung von 11) und 13) §. 5 folgt:

$$\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y} \partial y}{(g^2+y)^{5/2}} = \frac{2^3}{3}\left\{-\frac{5}{4}g - \frac{g^3}{2} + \Psi_{(1)}\left[\frac{3}{4}+3g^2+g^4\right]\right\}. \qquad 19)$$

Vereinigt man die Resultate aus 17), 18) und 19) und setzt:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_2 = \frac{1}{2}\left\{3^{3/2}\Psi_{(3)} - 2\,.\,2^{3/2}\Psi_{(2)} + \Psi_{(1)}\right\} + \frac{f}{2}\left\{g + \Psi_{(1)}[3+2g^2] - 2^{3/2}\Psi_{(2)}\left[\frac{3}{2}+2g^2\right]\right\} + \\ + \frac{f^2}{2}\left\{-\frac{5}{4}g - \frac{g^3}{2} + \Psi_{(1)}\left[\frac{3}{4}+3g^2+g^4\right]\right\},\end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

so wird:

$$III = \left(\frac{\gamma}{B'}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{B'}}\,\Phi_2,$$

wobei $\log \Phi_2$ mit dem Argumente g aus der Tafel I entlehnt werden kann. Dieses Glied ist schon so klein, dass man dasselbe fast ohne Nachtheil hätte ganz übergehen können, indem es für die Horizontalrefraction bei mittleren Verhältnissen den Werth von beiläufig 1″ erreicht.

Als das Resultat der Integration des Hauptgliedes der Refraction ergibt sich somit der Ausdruck:

$$R_1' = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{\Phi_0 + \frac{\gamma}{B'}\Phi_1 + \left(\frac{\gamma}{B'}\right)^2 \Phi_2\right\}. \qquad 21)$$

Die Werthe von $\log \Phi_0$, $\log \Phi_1$ und $\log \Phi_2$ sind, wie bemerkt, in der Tafel I vereinigt und mit dem Argumente g oder $\log g$ zu entlehnen; g wird bestimmt durch:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}}.$$

Die Rechnung der Refraction wird durch die angeführten Formeln und mit Benützung der Tafel I derartig einfach, dass sie in wenigen Minuten beendet werden kann. Zu der Tafel I habe ich hinzuzufügen, dass dieselbe von den Herren Anton und Schram sorgfältig berechnet wurde, so dass die letzten Stellen selten um mehr als eine Einheit fehlerhaft sein dürften; um die Interpolation des Werthes Φ_1 in der Nähe des Nullwerthes der Grenze g einfach zu gestalten, ist zu Tafel I an der entsprechenden Stelle neben den Werthen von $\log \Phi_1$ zusätzlich noch der Werth von Φ_1 selbst angefügt.

Ich will die Berechnung des Hauptgliedes der Refraction durch ein Beispiel erläutern. Es sei ein Zustand der Atmosphäre angenommen, welcher bedingt, dass:

$$\log B = 7{\cdot}01898-10$$
$$\log \beta = 6{\cdot}70766-10$$
$$\log \alpha = 6{\cdot}45008-10,$$

wird; die scheinbare Zenithdistanz sei 90°20′ und dafür die Refraction zu bestimmen. Es findet sich sonach:

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{\sin z^2}, \quad \log \gamma = 6{\cdot}35834-10,$$

also:

$$B' = B + gf, \qquad \log B' = 7{\cdot}09122-10, \qquad f = 0{\cdot}8284271,$$

und:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}}, \qquad g = -0{\cdot}11712,$$

demnach wird, wenn man:

$$\log \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arc} 1''} = 1{\cdot}91514,$$

ansetzt (der Division mit arc 1″ entsprechend wird die Refraction in Bogensecunden erhalten), und wenn weiters:

$$(A_1) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}},$$

$$(A_2) = (A_1)\frac{\gamma}{B'},$$

$$(A_3) = (A_2)\frac{\gamma}{B'},$$

geschrieben wird, sich die vollständige Rechnung des Hauptgliedes der Refraction, wie folgt, gestalten:

$\log(\gamma : B') = 9\cdot26712$
$\log(A_1) = 3\cdot36953$
$\log\Phi_0 = 0\cdot00718$ (Tafel I Arg. g)
$\log(A_2) = 2\cdot6366$
$\log\Phi_1 = 8_n4612$ („ „ „ aus Columne Φ_1)
$\log(A_3) = 1\cdot904$
$\log\Phi_2 = 8\cdot227$ („ „ „)

$(A_1)\Phi_0 = +2380\cdot72$
$(A_2)\Phi_1 = -\ \ 12\cdot53$
$(A_3)\Phi_2 = +\ \ \ 1\cdot35$
$R'_1 = 39'29''54$

§. 7. Integration der Correctionsglieder.

Der vorstehende Paragraph enthält die Bestimmung des Hauptgliedes der Refraction, die anderen Glieder mit Ausnahme von ∂R_2 fügen wenig Merkbares zu und dies nur in jenen Fällen, wenn die Zenithdistanzen sehr gross werden; ich werde dieselben der Reihe nach vornehmen. Übergeht man die Producte von P in die Glieder R_2, R_3 und R_4, was wegen der Kleinheit dieser Glieder (die meisten Refractionstheorien beschäftigen sich gar nicht mit der Entwicklung derselben) gestattet ist, so hat man für s in den Ausdrücken 5) §. 6 zu setzen:

$$s = -B\log\text{nat}\,x + \beta(1-x),$$

und es wird:

$$\partial R_2 = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\,\frac{B^2(\log\text{nat}\,x)^2 - 2B\beta(1-x)\log\text{nat}\,x + \beta^2(1-x)^2}{(\text{cotg}\,z^2 + 2\gamma[1-x] - 2B\log\text{nat}\,x)^{3/2}}\,\partial x,$$

oder durch Einführung der Variablen y nach 9) §. 6

$$\partial R_2 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\,\frac{\{B^2y^2 + 2B\beta y(1-e^{-y}) + \beta^2(1-e^{-y})^2\}e^{-y}\partial y}{\{\text{cotg}\,z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\}^{3/2}}.$$

Setzt man nun wie früher in 11) §. 6:

$$B' = B + \gamma f,$$

wobei f derselbe numerische Werth wie früher zukommt, so nimmt der Nenner des obigen Ausdruckes die Gestalt an:

$$\{\text{cotg}\,z^2 + 2B'y + 2\gamma(1-e^{-y} - fy)\}^{3/2}.$$

Entwickelt man diesen Nenner nach steigenden Potenzen von $2\gamma(1-e^{-y}-fy)$ und beachtet die rasche Convergenz, die man bei der analogen Entwicklung des Hauptgliedes zu bemerken Gelegenheit hatte, so ist

leicht einzusehen, dass man bei der Bestimmung der Correctionsglieder die Producte dieses Moduls in die letzteren übergehen kann. Man hat demnach mit genügender Genauigkeit:

$$R_2 = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\{B^2 y^2 + 2B\beta y(1-e^{-y}) + \beta^2(1-e^{-y})^2\} e^{-y} \partial y}{\{\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y\}^{3/2}}. \qquad 1)$$

Ganz denselben Weg verfolgend wird man finden:

$$R_3 = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{\{By + \beta(1-e^{-y})\} e^{-y} \partial y}{\{\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y\}^{1/2}}, \qquad 2)$$

und ebenso:

$$R_4 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \int_0^\infty \frac{(1-2e^{-y}) e^{-y} \partial y}{\{\operatorname{cotg} z^2 + 2B'y\}^{1/2}}. \qquad 3)$$

Die Integration dieser Ausdrücke hat mittelst der in §. 5 gegebenen Reductionsformeln keine Schwierigkeit, ich gehe desshalb nicht weiter hierauf ein. Um die Resultate übersichtlich zu schreiben, setze man:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\left\{\frac{g}{2} + \left(\frac{1}{2} - g^2\right)\Psi_{(1)}\right\}, & \varphi_4 &= \left\{\frac{g}{8} + \frac{g^3}{4} + \left(\frac{1}{8} - \frac{g^2}{2} - \frac{g^4}{2}\right)\Psi_{(1)}\right\} \\
\varphi_2 &= -\left\{\Psi_{(1)} - \frac{\Psi_{(2)}}{\sqrt{2}}\right\}, & \varphi_5 &= \left\{g^2(\Psi_{(1)} - \sqrt{2}\,.\,\Psi_{(2)}) + \frac{1}{2}\left(\Psi_{(1)} - \frac{\Psi_{(2)}}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
\varphi_3 &= \{\Psi_{(1)} - \sqrt{2}\,.\,\Psi_{(2)}\}, & \varphi_6 &= \frac{1}{2}\{-\Psi_{(1)} + 2\sqrt{2}\,.\,\Psi_{(2)} - \sqrt{3}\,.\,\Psi_{(3)}\}.
\end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Alle diese Glieder lassen sich mit dem schon definirten Argumente:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}},$$

leicht in Tafeln bringen und finden sich in der Tafel II aufgenommen, deren letzte Ziffer aber nicht durchaus verbürgt erscheint; hiebei sind, um die Interpolation zu erleichtern, für die negativen Werthe des Argumentes g (Zenithdistanz grösser als 90°) die Coëfficienten selbst angesetzt, mit Ausnahme von φ_3, welches logarithmisch gegeben ist, für die positiven und logarithmischen Argumente von g die Logarithmen der Coëfficienten. Die Reihenfolge der φ-Werthe ist so gewählt, dass in den praktisch wichtigen Fällen (g positiv) die drei ersten Coëfficienten das negative, die drei letzten das positive Vorzeichen haben. Die Tafeln selbst sind weiter als nöthig ausgedehnt, indem innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen ($g < 10$) manche derselben dem Resultate nur Unmerkbares hinzufügen. Die Fortsetzung über $g > 10$ erscheint überflüssig, da sich in solchem Falle, bei welchem die Zenithdistanzen kleiner als 65° werden, für die Refraction wesentlich bequemere Formen durch Reihenentwicklungen der Gammafunctionen herstellen lassen.

Berechnet man überdies:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,.\,B, & \gamma_4 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,\frac{B^2}{B'} \\
\gamma_2 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,.\,\beta, & \gamma_5 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,\frac{\beta B}{B'} \\
\gamma_3 &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\sqrt{\frac{2}{B'}}, & \gamma_6 &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\,\frac{\beta^2}{B'},
\end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

so ist:

$$R_2 + R_3 + R_4 = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \gamma_3\varphi_3 + \gamma_4\varphi_4 + \gamma_5\varphi_5 + \gamma_6\varphi_6, \qquad 6)$$

womit die Bestimmung der obigen Correctionsglieder auf eine sehr kurze Rechnung zurückgeführt erscheint. Bei der Ermittlung der Coëfficienten 5) kann man ohne Nachtheil B' als constant betrachten, denn B' ist zwar mit der Zenithdistanz veränderlich, aber man begeht, wenn für B' der bei $z = 90°$ geltende Werth angenommen wird, nur unmerkliche Fehler. Für einen gegebenen Zustand der Atmosphäre sind also die obigen γ-Coëfficienten constant; bei den unten folgenden Rechnungen habe ich von dieser Vereinfachung keinen Gebrauch gemacht. Mit Hilfe der bereits bei der Rechnung des Hauptgliedes benützten Zahlen ist die Bestimmung der Coëfficienten sehr einfach; es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= (A_1)\,B\,, & \gamma_4 &= \gamma_1\frac{B}{B'} \\ \gamma_2 &= (A_1)\,\beta\,, & \gamma_5 &= \gamma_4\frac{\beta}{B} = \gamma_2\frac{B}{B'} \\ \gamma_3 &= (A_1)\,\frac{\alpha}{1-\alpha} & \gamma_6 &= \gamma_5\frac{\beta}{B} = \gamma_2\frac{\beta}{B'}. \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Ich will nun das oben begonnene Beispiel ($g = -0\cdot1171$) fortsetzen. Man erhält bei einer vollständigen Rechnung die folgenden Zahlen:

$\log(A_1) = 3\cdot370$	$\log(B:B') = 9\cdot928$	$\gamma_1\varphi_1 = -1''066$
$\log\gamma_1 = 0\cdot389$	$\log(\beta:B') = 9\cdot616$	$\gamma_2\varphi_2 = -0\cdot303$
$\log\varphi_1 = 9_n639$	$\log\gamma_4 = 0\cdot317$	$\gamma_3\varphi_3 = -0\cdot337$
$\log\gamma_2 = 0\cdot078$	$\log\varphi_4 = 9\cdot021$	$\gamma_4\varphi_4 = +0\cdot218$
$\log\varphi_2 = 9_n403$	$\log\gamma_5 = 0\cdot006$	$\gamma_5\varphi_5 = +0\cdot122$
$\log\gamma_3 = 9\cdot820$	$\log\varphi_5 = 9\cdot079$	$\gamma_6\varphi_6 = +0\cdot019$
$\log\varphi_3 = 9_n708$	$\log\gamma_6 = 9\cdot694$	$R_2+R_3+R_4 = -1\cdot35.$
	$\log\varphi_6 = 8\cdot580.$	

Durch Hinzufügung dieser geringen Correctionsglieder zu dem im vorigen Paragraphe gefundenen Hauptgliede der Refraction resultirt die Refraction:

$$39'28''19.$$

Nimmt man also die oben angeführte Constitution der Atmosphäre an, die sich vielleicht besser, mindestens aber ebensogut den Thatsachen anschliesst als irgend eine der gemachten Aufstellungen, ohne auf eventuelle Correctionen bei dieser Annahme Rücksicht zu nehmen, so ist die ermittelte Zahl der vollständige Betrag der Refraction und theoretisch auf höchstens 0″03 ungenau. Die Kürze und Leichtigkeit der Rechnung muss demnach dieser Methode als besonderer Vorzug gegen anderweitige Methoden eingeräumt werden, in Bezug auf Genauigkeit steht sie keiner nach und übertrifft wohl die meisten derselben.

Will man aber eventuelle Correctionen in Bezug auf die angenommene Constitution der Atmosphäre eintreten lassen, die übrigens nur für die grössten Zenithdistanzen merkbare Werthe annehmen werden, so bedarf es noch der Integration der Glieder dR''_1 und dR'''_1, wobei es aber bei der Unsicherheit, die dem eingeführten numerischen Coëfficienten anhaftet, praktisch hinreichend sein wird, sich auf das erstere Glied allein zu beschränken.

Vernachlässigt man überdies das Product dieses Correctionsgliedes in $2\gamma(1-e^{-y}-fy)$, wiewohl die Mitnahme theoretisch ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden könnte, so erhält man sofort, wenn für P der Werth aus 8) §. 4 eingeführt wird:

$$R''_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\Sigma k\,\frac{\lambda}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{-\frac{\sigma-1}{\sigma}\Psi_{(1)}+2\sqrt{2}\Psi_{(2)}-\frac{(\sigma+1)^{3/2}}{\sigma}\Psi_{(\sigma+1)}\right\}. \qquad 8)$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammer kann wieder mit dem Argumente g tabulirt werden; bezeichnet man ihn mit φ_σ, so gibt die Tafel III die Beträge von $\log\varphi_\sigma$ für verschiedene Werthe von $\log\sigma$. Die letzte

Stelle dieser Tafelwerthe ist aber als nicht völlig sicher zu bezeichnen. Der Gebrauch der Tafel III wird später vorgenommen werden, nur so viel ist hier hervorzuheben, dass R_1'' mittelst derselben auf die Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\lambda}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}} \\ R_1'' &= F\Sigma k\varphi_{\gamma\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

§. 8. Entwicklung der Refraction nach den ungeraden Potenzen von tg z.

Die Darstellung der Refraction durch eine Reihe der ungeraden Potenzen der Tangente der Zenithdistanz ist sehr vortheilhaft, so lange die Zenithdistanz nicht 70° überschreitet; es soll diese Entwicklung nun dadurch erreicht werden, dass in den obigen Integralen statt der Gammafunctionen die Reihe 18) §. 5 derselben substituirt wird. Es wird danach sein:

$$\Psi_{(n)} = \frac{1}{2g\sqrt{n}} - \frac{1}{2^2(g\sqrt{n})^3} + \frac{1.3}{2^3(g\sqrt{n})^5} - \frac{1.3.5}{2^4(g\sqrt{n})^7} + \ldots \qquad 1)$$

Die Entwicklung wird etwas kürzer und eleganter, wenn man von der Einführung der Grösse B (Gl. 11, §. 6) Umgang nimmt; die unmittelbare Entwicklung des Hauptgliedes der Refraction (Gl. 10, §. 6) nach Potenzen von $2\gamma(1-e^{-y})$ ergibt:

$$R_1' = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-y}\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2By)^{1/2}} - \gamma\int_0^\infty \frac{e^{-y}(1-e^{-y})\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2By)^{3/2}} + \frac{1.3}{1.2}\gamma^2\int_0^\infty \frac{e^{-y}(1-e^{-y})^2\partial y}{(\operatorname{cotg} z^2+2By)^{5/2}} - \ldots\right\}.$$

Führt man die Integration nach 16) §. 5 aus, so kann man das Resultat derselben sofort hinschreiben; es wird nämlich:

$$R_1' = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B}}\left\{\Psi_{(1)} - \frac{\gamma}{B}[2^{1/2}\Psi_{(2)} - \Psi_{(1)}] + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\gamma}{B}\right)^2[3^{3/2}\Psi_{(3)} - 2.2^{3/2}\Psi_{(2)} + \Psi_{(1)}] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\gamma}{B}\right)^3[4^{5/2}\Psi_{(4)} - 3.3^{5/2}\Psi_{(3)} + 3.2^{5/2}\Psi_{(2)} - \Psi_{(1)}]\ldots\right\}. \qquad 2)$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für die verschiedenen Ψ-Functionen der Reihe nach 1) und beachtet, dass (2), §. 5):

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B}},$$

in welchem Ausdrucke der Bedeutung der Formel entsprechend B und nicht B' einzusetzen ist, so gibt die Entwicklung bis zur fünften Potenz von tg z inclusive (also bis auf die dritten Potenzen der Refraction) durchgeführt zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{B}}\Psi_{(1)} &= \operatorname{tg} z - B\operatorname{tg} z^3 + 1.3B^2\operatorname{tg} z^5 - \ldots \\ \sqrt{\frac{2}{B}}\Psi_{(2)} &= \frac{\operatorname{tg} z}{2^{1/2}} - B\frac{\operatorname{tg} z^3}{2^{3/2}} + 1.3B^2\frac{\operatorname{tg} z^5}{2^{5/2}} - \ldots \\ \sqrt{\frac{2}{B}}\Psi_{(3)} &= \frac{\operatorname{tg} z}{3^{1/2}} - B\frac{\operatorname{tg} z^3}{3^{3/2}} + 1.3B^2\frac{\operatorname{tg} z^5}{3^{5/2}} - \ldots, \\ \ldots\ldots & \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

und es wird:

$$\sqrt{\frac{2}{B}}\{2^{1/2}\Psi_{(2)} - \Psi_{(1)}\} = \frac{1}{2}B\operatorname{tg} z^3 - \frac{9}{4}B^2\operatorname{tg} z^5 + \ldots$$

$$\sqrt{\frac{2}{B}}\{3^{3/2}\Psi_{(3)} - 2.2^{3/2}\Psi_{(2)} + \Psi_{(1)}\} = B^2\operatorname{tg} z^5 - \ldots\ldots;$$

man erhält somit für das Hauptglied der Refraction die Reihe:

$$R'_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\operatorname{tg} z - \left(B + \frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{tg} z^3 + \left(3B^2 + \frac{9}{4}\gamma B + \frac{1}{2}\gamma^2\right)\operatorname{tg} z^5 - \ldots\right\}. \qquad 4)$$

In dieser Formel erscheint γ als Function der Zenithdistanz; es ist nämlich oben (§. 6):

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{\sin z^2} = (\beta-\alpha) - \alpha \operatorname{cotg} z^2$$

gesetzt worden; es ist also:

$$\gamma^2 = (\beta-\alpha)^2 - 2\alpha(\beta-\alpha)\operatorname{cotg} z^2 + \alpha^2 \operatorname{cotg} z^4.$$

Ersetzt man γ in der Gl. 4) durch diese Relationen, so erhält man für das Hauptglied der Refraction den folgenden Ausdruck, der bis auf Grössen dritter Ordnung der Refraction richtig ist:

$$R'_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\operatorname{tg} z\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \operatorname{tg} z^3\left(B + \frac{1}{2}[\beta-\alpha] + \alpha\left[\frac{9}{4}B + \beta - \alpha\right]\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tg} z^5\left(3B^2 + \frac{9}{4}B[\beta-\alpha] + \frac{1}{2}[\beta-\alpha]^2\right)\right\}. \qquad 5)$$

Hätte man die Substitution auf die Glieder zweiter Ordnung beschränkt und führt für B und β die früher angenommenen Ausdrücke §. 4, Gl. 7)* ein, so fände sich:

$$R'_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\operatorname{tg} z\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right) - \operatorname{tg} z^3\left(L[1+\xi][1+mt_0] - \frac{1}{2}\alpha\right)\right\}. \qquad 6)$$

Dieser Ausdruck kommt dem Wesen nach mit Laplace's Satz überein, dass die Refraction, wenn sie nach den ungeraden Potenzen von $\operatorname{tg} z$ entwickelt wird, mit Beschränkung auf die ersten zwei Glieder ganz ohne irgend eine Annahme über die Constitution der Atmosphäre angegeben werden kann; richtiger aber wäre es zu sagen: Man kann das Hauptglied der Refraction bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive genau angeben, ohne eine Annahme über die Temperaturvertheilung in der Atmosphäre zu machen, die concentrische Schichtung der Atmosphäre vorausgesetzt. Das erste Glied hängt nur von der Dichte der Luft am Beobachtungsorte ab, das zweite enthält bereits die Krümmung der Luftschichten, bedingt durch die Gestalt der Erde. Diese letzteren Betrachtungen geben wichtige, nicht immer hinreichend gewürdigte Fingerzeige zur Bestimmung der Refractionsconstanten. Da man die Refraction mit Hilfe der beiden ersten Glieder der Reihe bis auf Unwesentliches bis zu 70° Zenithdistanz darstellen kann, so wird man zu dem Schlusse gelangen, dass Refractionsbeobachtungen in kleineren Zenithdistanzen als 70° keinen Beitrag zur Ermittlung der Constitution der Atmosphäre liefern können; anderseits wird man schliessen dürfen, und dies ist wesentlich, dass die Constante $\alpha:(1-\alpha)$ der Refraction aus solchen Beobachtungen ($z < 70°$) frei von jeder Hypothese über die Constitution der Atmosphäre erhältlich ist. Es wird sich daher empfehlen, zur Bestimmung der Refractionsconstante und deren Änderung durch die Temperatur aus den Beobachtungen die allzu grossen Zenithdistanzen auszuschliessen; Beobachtungen in sehr kleinen Zenithdistanzen werden an sich wegen der Kleinheit von $\operatorname{tg} z$ keinen wesentlichen Beitrag zu derartigen Bestimmungen liefern. Will man dagegen aus Refractionsbeobachtungen Schlüsse in Bezug auf die Constitution der Atmosphäre ziehen, so können hiezu nur die grössten Zenithdistanzen herangezogen werden, wobei man die Constante der Refraction keiner Correction unterziehen darf, sondern so anzunehmen hat, wie sie aus den Beobachtungen kleiner Zenithdistanzen folgt. Diese Schlüsse bleiben sehr unsicher, da die Refraction in grossen Zenithdistanzen starken localen Störungen unterworfen ist, die grösser sind als der Einfluss der allgemeinen Temperaturvertheilung in der Luft. Es wird desshalb auch vortheilhaft sein, das aus den meteorologischen Beobachtungen abgeleitete allgemeine Gesetz der Temperaturabnahme, also die Constante C, unverändert beizubehalten und die Refractionen aus sehr grossen Zenithdistanzen zur Bestimmung der localen Störungen zu verwerthen. In den praktisch wichtigen

Fällen ist daher die Refraction bestimmt durch die Dichte der Luftschichte, in welcher die Beobachtung angestellt wird, vorbehaltlich der in die Differentialgleichung eingeführten Bedingung der horizontalen Schichtung der Luft. Über diese Schichtung wird man wohl kaum je eine andere Annahme machen dürfen; selbst in solchen Fällen, wo der Lichtstrahl eine Spalte zu passiren hat, um zum Beobachtungsinstrumente zu gelangen, wird im Allgemeinen die Hypothese über die Horizontalität der Schichten der Wahrheit nahe kommen; es ist demnach für die Bestimmung der Refraction die Temperatur der Luft im Beobachtungsraume (vor dem Objectiv) massgebend und die Benützung der äusseren Thermometer zu diesem Zwecke jedenfalls weniger zu empfehlen. Manche Anomalien, die sich bei sonst sehr genauen Refractionsbeobachtungen heraussstellen, erklären sich aus der Nichtbeachtung dieses Umstandes.

Es erübrigt noch, das Resultat der obigen Reihenentwicklung für die Correctionsglieder, die in §. 7 näher behandelt wurden, zu verbessern. Man wird bemerken, dass man sich auf die Entwicklung der Glieder, die aus φ_1 und φ_2 entstehen, beschränken könnte, denn die anderen beeinflussen selbst bei 70° Zenithdistanz die Refraction nur um wenige Tausendtheile der Bogensecunde; der Vollständigkeit halber will ich aber die übrigen Correctionsglieder mitnehmen. Auch in diesem Falle ist die Entwicklung eleganter, wenn man von der Einführung der Grösse B' Umgang nimmt, doch sind die erforderlichen Integrationen weitläufig; ich ziehe es desshalb vor, bei der Berechnung der Correctionsglieder von den Formeln auszugehen, die von B' Gebrauch machen. Die Substitution der Reihe 1), pag. 27 in die Gl. 4) §. 7 ergibt:

$$\varphi_1 = -\left\{\frac{1}{2g} - \frac{1}{2g^3} + \frac{9}{8g^5}\right\}, \qquad \varphi_4 = \frac{1}{4g^3} - \frac{9}{8g^5}$$

$$\varphi_2 = -\left\{\frac{1}{4g} - \frac{3}{16g^3} + \frac{21}{64g^5}\right\}, \qquad \varphi_5 = \frac{3}{16g^3} - \frac{21}{32g^5}$$

$$\varphi_3 = -\left\{\frac{1}{8g^3} - \frac{9}{32g^5}\right\}, \qquad \varphi_6 = \frac{1}{24g^3} - \frac{11}{96g^5};$$

wobei zu setzen ist:

$$g = \frac{\operatorname{cotg} z}{\sqrt{2B'}};$$

es ist also:

$$\gamma_1\varphi_1 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}B\{\operatorname{tg} z - 2B' \operatorname{tg} z^3\}$$

$$\gamma_2\varphi_2 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\beta\left\{\frac{\operatorname{tg} z}{2} - \frac{3}{4}B' \operatorname{tg} z^3\right\}$$

$$\gamma_3\varphi_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 B' \operatorname{tg} z^3$$

$$\gamma_4\varphi_4 = \frac{\alpha}{1-\alpha}B^2 \operatorname{tg} z^3$$

$$\gamma_5\varphi_5 = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{1-\alpha}\beta B \operatorname{tg} z^3$$

$$\gamma_6\varphi_6 = \frac{1}{6}\frac{\alpha}{1-\alpha}\beta^2 \operatorname{tg} z^3.$$

Die ersten drei Ausdrücke enthalten B'; substituirt man in dieselben

$$B' = B + \left(\beta - \frac{\alpha}{\sin z^2}\right)f = B + (\beta - \alpha - \alpha \operatorname{cotg} z^2)f,$$

so findet sich:

$$\gamma_1\varphi_1 = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\{\operatorname{tg} z\,(1+2\alpha f)B - 2\operatorname{tg} z^3(B^2+Bf[\beta-\alpha])\}$$

$$\gamma_2\varphi_2 = -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left\{\operatorname{tg} z\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\alpha f\right)\beta - \frac{3}{4}\operatorname{tg} z^3(B\beta+\beta f[\beta-\alpha])\right\}$$

$$\gamma_3\varphi_3 = +\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\alpha f\operatorname{tg} z - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2(B+f[\beta-\alpha])\operatorname{tg} z^3.$$

Addirt man die Resultate der Entwicklung der Correctionsglieder zum Hauptgliede Gl. 5) und schreibt in den Gliedern dritter Ordnung statt $\frac{1}{1-\alpha}$ die Einheit, so findet sich die Refraction bestimmt durch:

$$\begin{aligned} R = \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big\{&\operatorname{tg} z\Big[\Big(1+\frac{\alpha}{2}-B-\frac{\beta}{2}\Big)+\alpha\Big(\frac{\alpha}{2}-f\Big[2B+\frac{3}{4}\beta-\frac{1}{2}\alpha\Big]\Big)\Big]- \\ &-\operatorname{tg} z^3\Big[\Big(B+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha\Big)+\alpha\beta+\frac{11}{4}B\alpha-\alpha^2-3B^2-\frac{3}{2}\beta B-\frac{1}{6}\beta^2+ \\ &\qquad +f(\alpha-\beta)(2B+\frac{3}{4}\beta-\frac{1}{2}\alpha)\Big]+ \\ &+\operatorname{tg} z^5\Big[3B^2+\frac{9}{4}B(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Zu diesen Gliedern wären noch jene Correctionsglieder hinzuzufügen, welche aus den veränderten Annahmen über die Constitution der Atmosphäre entstehen. Da aber diese nur für sehr grosse Zenithdistanzen merklich werden können, bei denen dann die Benützung der Formel 9), §. 7 vortheilhafter ist, so gehe ich auf deren Entwicklung nicht näher ein.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} L' &= L(1+\xi) \\ B &= L'+mL'C \\ \beta &= 2mt_0L'-2mCL' \end{aligned}\right\} \text{vergl. Gl. 7), §. 4.}$$

und ferner:

$$\left.\begin{aligned} (I) &= 1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}(1+f)\quad -L'\Big(1+2\alpha f+mt_0\Big[1+\frac{3}{2}\alpha f\Big]\Big)-\frac{1}{2}\alpha fL'mC, \\ (II) &= -\frac{1}{2}\alpha-\alpha^2\Big(1+\frac{1}{2}f\Big)+L'\Big\{1+\alpha\Big[\frac{11}{4}+2f\Big]+mt_0\Big[1+2\alpha+\frac{5}{2}\alpha f\Big]\Big\} \\ &\qquad -L'^2\Big\{3+mt_0\Big[3+4f\Big]+m^2t_0^2\Big[\frac{2}{3}+3f\Big]\Big\} \\ &\qquad +L'\Big\{\frac{3}{4}\alpha\Big(1-\frac{2}{3}f\Big)-L'\Big[3-4f+mt_0\Big(\frac{5}{3}-2f\Big)\Big]\Big\}mC \\ &\qquad +L'^2\Big\{-\frac{2}{3}+f\Big\}m^2C^2, \\ (III) &= \frac{1}{2}\alpha^2-L'\alpha\Big\{\frac{9}{4}+2mt_0\Big\} \\ &\qquad +L'^2\Big\{3+\frac{9}{2}mt_0+2m^2t_0^2\Big\} \\ &\qquad +L'\Big\{-\frac{1}{4}\alpha+\frac{L'}{2}[3+mt_0]\Big\}mC \\ &\qquad +L'^2\Big\{\frac{1}{2}m^2C^2\Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so ist:

$$R = \frac{\alpha''}{1-\alpha}\left\{(I)\operatorname{tg} z - (II)\operatorname{tg} z^3 + (III)\operatorname{tg} z^5\right\}; \qquad 9)$$

in dieser Formel ist α'' gleich $\alpha : \text{arc } 1''$ zu setzen.

§. 9. Änderung der Refraction durch kleine Änderungen in den Werthen der zu Grunde gelegten Constanten.

Die Bestimmung der Refraction zu einer gegebenen Zenithdistanz bedarf, wie die Ansicht der Formeln lehrt, der Kenntniss der Werthe α, β und B. Jede dieser Grössen hängt von Werthen ab, die den Beobachtungen entlehnt werden müssen, kann also unter Umständen Veränderungen erfahren, welche etwa aus einer corrective Bestimmung der zu Grunde gelegten Werthe resultirt. Es wird daher zweckmässig erscheinen, den Einfluss von Änderungen in diesen Grössen auf differentiellem Wege zu ermitteln, wobei hier gleich erwähnt werden kann, dass von den so entstandenen Formeln, bei denen es sich um die Bestimmung der Refractionscorrectionen wegen Temperatur und Barometerstand handelt, nicht Gebrauch gemacht werden soll; die Correctionen sind nämlich in der Regel so gross, dass die blosse Berücksichtigung der ersten Potenz der Änderungen nicht völlig ausreichend ist, wiewohl man sich in den meisten Theorien damit begnügt hat.

Es sei q jene Grösse, welche die Änderung ∂q erfährt, so ist mit ausreichender Näherung, da nur geringe Änderungen vorausgesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \partial\alpha &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q}\right)\partial q \\ \partial\beta &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial q}\right)\partial q \\ \partial B &= \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)\partial q. \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

Die Bestimmung der in diesen Gleichungen auftretenden Differentialquotienten wird in der Regel keine Schwierigkeit haben, da der Zusammenhang zwischen α, β, B und den der Bestimmung derselben zu Grunde gelegten Werthen ein sehr einfacher ist. Indem ich mich bei der folgenden Untersuchung auf den Einfluss der Correction auf das Hauptglied der Refraction beschränke, setze ich zuerst die bezügliche Differentialgleichung (Gl. 10, §. 6) an:

$$\partial R'_1 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{e^{-y}\partial y}{\left\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\right\}^{1/2}}.$$

In derselben erscheint β nicht unmittelbar, sondern ist mit γ verbunden durch die Relation:

$$\gamma = \beta - \frac{\alpha}{\sin z^2};$$

es wird also zu setzen sein:

$$\partial R'_1 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{e^{-y}\partial y}{\left\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\beta(1-e^{-y}) - \frac{2\alpha}{\sin z^2}(1-e^{-y})\right\}^{1/2}}.$$

Variirt man also der Reihe nach diesen Ausdruck nach α, β, B, so erhält man:

$$\partial\,\frac{\partial R'_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial R'_1}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)\sin z^2}\,\frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{\left\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\right\}^{3/2}}$$

$$\partial\,\frac{\partial R'_1}{\partial\beta} = +\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{\left\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\right\}^{3/2}}$$

$$\partial\,\frac{\partial R'_1}{\partial B} = +\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{y\,e^{-y}\partial y}{\left\{\operatorname{cotg} z^2 + 2By + 2\gamma(1-e^{-y})\right\}^{3/2}},$$

und durch die Integration findet sich:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R_1'}{\partial\alpha} &= \frac{R_1'}{\alpha(1-\alpha)}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)\sin z^2}\int_0^\infty\frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{\{\mathrm{cotg}\, z^2+2By+2\gamma(1-e^{-y})\}^{3/2}}\\
\frac{\partial R_1'}{\partial\beta} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\infty\frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{\{\mathrm{cotg}\, z^2+2By+2\gamma(1-e^{-y})\}^{3/2}}\\
\frac{\partial R_1'}{\partial B} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_0^\infty\frac{ye^{-y}\partial y}{\{\mathrm{cotg}\, z^2+2By+2\gamma(1-e^{-y})\}^{3/2}}.
\end{aligned}\right\}\quad 2)$$

Führt man wieder B' nach 11), §. 6 ein und begnügt sich mit dem ersten Gliede der Entwicklung, lässt also die in Potenzen von $(1-e^{-y}-fy)$ multiplicirten Glieder weg, ein Verfahren, das bei der Bestimmung von Correctionsgliedern zulässig erscheint, so findet sich, dass die Ermittlung der obigen Werthe von zwei Integralen abhängt, die bereits in den vorhergegangenen Entwicklungen (pag. 21) enthalten sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{(1-e^{-y})e^{-y}\partial y}{(\mathrm{cotg}\, z^2+2B'y)^{3/2}} &= \frac{1}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\{2^{1/2}\Psi_{(2)}-\Psi_{(1)}\}\\
\int_0^\infty\frac{ye^{-y}\partial y}{(\mathrm{cotg}\, z^2+2B'y)^{3/2}} &= \frac{1}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{\left(g^2+\frac{1}{2}\right)\Psi_{(1)}-\frac{1}{2}g\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad 3)$$

Setzt man diese Werthe in 2) ein und macht, was sich als zweckmässig erweist, den Übergang auf:

$$\partial\log R_1' = \frac{\partial R_1'}{R_1'}\,\mathrm{Mod.},$$

so findet sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\log R_1'}{\partial\alpha} &= \frac{\mathrm{Mod}}{\alpha(1-\alpha)}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)\sin z^2}\,\frac{\mathrm{Mod}}{R_1'}\,\frac{1}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\{2^{1/2}\Psi_{(2)}-\Psi_{(1)}\}\\
\frac{\partial\log R_1'}{\partial\beta} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\mathrm{Mod}}{R_1'}\,\frac{1}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\{2^{1/2}\Psi_{(2)}-\Psi_{(1)}\}\\
\frac{\partial\log R_1'}{\partial B} &= -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\mathrm{Mod}}{R_1'}\,\frac{1}{B'}\sqrt{\frac{2}{B'}}\left\{\left(g^2+\frac{1}{2}\right)\Psi_{(1)}-\frac{1}{2}g\right\}.
\end{aligned}$$

Innerhalb der bereits als zulässig betrachteten Genauigkeitsgrenzen kann man in diesen Ausdrücken setzen:

$$R_1' = \frac{\alpha}{1-\alpha}I = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{B'}}\cdot\Phi_0.$$

Schreibt man daher:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Mod.}\,\frac{\Psi_{(1)}-\Psi_{(2)}\sqrt{2}}{\Phi_0} &= \varphi_\beta\\
-\mathrm{Mod.}\,\frac{(g^2+{}^1\!/_2)\Psi_{(1)}-{}^1\!/_2 g}{\Phi_0} &= \varphi_B,
\end{aligned}\right\}\quad 4)$$

so kann man diese Grössen leicht mit dem Argumente:

$$g = \frac{\mathrm{cotg}\, z}{\sqrt{2B'}},$$

in Tafeln bringen. Tafel IV gibt in hinreichender Annäherung diese Coëfficienten mit dem Argumente g oder $\log g$; mit Benützung dieser Tafel schreiben sich die gesuchten Differentialquotienten wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log R_1'}{\partial \alpha} &= \frac{\text{Mod}}{\alpha} - \frac{\varphi_3}{B' \sin z^2}\\ \frac{\partial \log R_1'}{\partial \beta} &= \frac{\varphi_3}{B'}\\ \frac{\partial \log R_1'}{\partial B} &= \frac{\varphi_B}{B'}.\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Für kleinere Zenithdistanzen sind diese Formeln wenig bequem, und deren Anwendung dadurch beschränkt, dass der grösste Werth von g, 10 ist, für welchen die Tafel gerechnet erscheint; hier wird aber die Benützung von Gl. 9) §. 8 in diesem Falle besonderen Vortheil bieten: In den Gliedern (I), (II), (III) treten nämlich unmittelbar die Werthe ein, die einer eventuellen Verbesserung unterworfen sind; da sich in diesem Falle das Resultat der Differentiation so überaus einfach gestaltet, so gehe ich auf die diesbezüglichen Formen hier nicht näher ein.

§. 10. Ein Beispiel für die Berücksichtigung der aus den modificirten Temperaturverhältnissen entstehenden Correctionsglieder.

Die Gleichung 9) des siebenten Abschnittes lässt jene Correctionen in der Refraction finden, welche dadurch entstehen, dass das allgemeine Gesetz für die Temperaturabnahme besonders in den unteren Luftschichten mehrfacher Modificationen bedarf. Es ist noch keineswegs der Zeitpunkt als gekommen zu betrachten, der eine vollständige Lösung dieses Theiles des Problems vom praktischen Standpunkte aus ermöglicht, doch will ich in ganz provisorischer Weise zeigen, wie man etwa diese Correctionsglieder dazu verwerthen kann, um die tägliche Periode in der Refraction in genäherter Weise zu ermitteln; in ähnlicher Weise liessen sich anderweitige Correctionen behandeln, doch wird sowohl zur strengeren und genaueren Behandlung des vorliegenden, als auch der anderweitigen Probleme geschritten werden können, bis die in der Theorie der Refraction auftretenden Parameter durch geeignete Hilfsmittel genauer bestimmt sein werden, als dies gegenwärtig der Fall ist.

Ich will die bekannten Argelander'schen Refractionsbeobachtungen hiezu verwerthen; doch will ich nochmals hier hervorheben, dass die folgenden Zahlen nur als Beispiele zu betrachten sind, in welcher Weise die obigen Formeln der Verwerthung zugeführt werden können. In den „Astron. Beobachtungen auf der Universitätssternwarte bei Königsberg“, 8. Abth., p. XV, findet sich nach den von Bessel mitgetheilten Resultaten der mittlere Unterschied zwischen den an den Sternen und der Sonne beobachteten Refractionsbeträgen wie folgt:

z	Refr. ✳ — Refr. ☉	$(t_0 - t_m)$ ✳	$(t_0 - t_m)$ ☉
85° 0'	+ 1"0	—2°39 Cels.	+2°41 Cels.
85 30	+ 5·2	—2·18	+2·79
86 0	+ 3·3	—1·92	+2·58
86 30	0·0	—1·86	+1·48
87 0	+ 1·8	—2·38	+1·59
87 30	+ 5·0	—3·28	+1·59
88 0	+ 6·2	—3·21	+1·58
88 30	+ 9·7	—3·01	+1·11
89 0	+22·9	—2·84	+1·11
89 30	+30·4	—3·28	+0·37.

Die Columnen $(t_0 - t_m)$✳ und $(t_0 - t_m)$☉ geben die im Mittel stattgehabten Abweichungen der Lufttemperatur von dem Mittelwerthe für die Tagestemperatur, welch' letztere Werthe allerdings nur nach ihren

aus langjährigen Königsberger Beobachtungen bestimmten Mittelwerthen angenommen werden konnten; übrigens wird auch ein Fehler in dieser Richtung nicht allzusehr schädigend wirken, da derselbe der Hauptsache nach aus der Differenz der für die Sterne geltenden Temperaturabweichungen gegen jene der Sonne herausfallen wird. Man wird bemerken, dass, wie dies auch zu erwarten war, für die Sternbeobachtungen die Temperaturen unter, für die Sonnenbeobachtungen über dem Tagesmittel sich bewegten. Gibt man nun dem von der täglichen Periode abhängigen Gliede k die Form:

$$k = k_0(t_0 - t_m),$$

so wird man nach 9) des siebenten Abschnittes für σ und k_0 jene Werthe zu suchen haben, welche den Beobachtungen sehr nahe genügen; hierbei wird man $\log F = 0{\cdot}944$ setzen können und φ_σ aus der Tafel III mit dem Argument g zu entlehnen haben.

Zunächst wird man zu bemerken haben, dass die Unterschiede, die zwischen den Sonnen- und Sternbeobachtungen zwischen 85°—87° auftreten, nur zum geringsten Theile als der täglichen Periode entstammend angesehen werden können und vielleicht aus Fehlerquellen hervorgehen, die der hier zu bestimmenden Grösse fremd sind; es scheint für die vorliegende Untersuchung daher am zweckmässigsten, etwa die fünf ersten Werthe im Mittel zu vereinigen und dieses Mittel als constante Fehlerquelle in Rechnung zu ziehen, nur wird es zweckmässig sein, sofort das Mittel in der zu ermittelnden Correction entsprechenden Weise zu corrigiren. Das Mittel der ersten fünf Zahlen ist: +2″26, die allerdings nur durch eine vorläufige Rechnung bekannte Correctur dieser Zenithdistanzunterschiede wurde mit —0″76 angenommen, man hat sonach die obigen Unterschiede um 1″5 zu vermindern und erhält so:

	$\ast - \odot$		$\ast - \odot$
85° 0′	−0″5	87°30′	+ 3″5
85 30	+3·7	88 0	+ 4·7
86 0	+1·8	88 30	+ 8·2
86 30	—1·5	89 0	+21·4
87 0	+0·3	89 30	+28·9.

Nimmt man nun $\log\sigma = 0{\cdot}8$, $\log B' = 7{\cdot}091$, $\log F = 0{\cdot}944$ an und führt die Rechnung für die fünf letzten Werthe durch, da dieselben fast allein massgebend für die Bestimmung des fraglichen Coëfficienten sind, so stellt sich dieselbe wie folgt:

	$\log\sigma = 0{\cdot}8$				
z	87°30′	88°0′	88°30′	89°0′	89°30′
g	+ 0·879	+ 0·703	+ 0·527	+ 0·351	+ 0·176
$\log\varphi_\sigma$ (Tafel III)	8_n498	8_n741	9_n009	9_n303	9_n632
$\log F(t_\ast - t_\odot)$	1_n632	1_n624	1_n559	1_n541	1_n506,

man hat also die logarithmisch angesetzte Bedingungsgleichung zur Bestimmung von k_0:

$$0{\cdot}544 = 0{\cdot}130\,k_0$$
$$0{\cdot}672 = 0{\cdot}365\,k_0$$
$$0{\cdot}914 = 0{\cdot}569\,k_0$$
$$1{\cdot}330 = 0{\cdot}844\,k_0$$
$$1{\cdot}461 = 1{\cdot}138\,k_0.$$

Daraus bestimmt man $\log k_0 = 0{\cdot}362$ und erhielt hiermit die folgenden, für die verschiedenen Zenithdistanzen geltenden Correctionen, neben welchen ich sofort die Unterschiede gegen die beobachteten Werthe angesetzt habe:

z	R.	B—R.	z	R.	B—R.
85° 0′	+0″3	−0″8	87°30′	+ 3″1	+0″4
85 30	+0·5	+3·2	88 0	+ 5·3	−0·6
86 0	+0·7	+1·1	88 30	+ 8·5	−0·3
86 30	+0·8	−2·3	89 0	+16·1	+5·3
87 0	+1·5	−1·2	89 30	+31·6	−2·7.

Die Übereinstimmung ist, wie man sieht, eine vollkommen befriedigende und übersteigt in keiner Weise die oft ganz beträchtliche Unsicherheit, welche den Beobachtungen anhaftet.

Es könnte noch gefragt werden, ob die so gefundenen Werthe auch die direct beobachteten Refractionswerthe darstellen, da die obigen Coëfficienten nur aus differentiellen Beobachtungen erhalten wurden. Reducirt man die in den Tabulis regiomontanis gegebenen Refractionswerthe auf die von mir gewählten Normalverhältnisse ($t = 10°$ Cels., Bar. $= 0^{m}76$) und beachtet, dass dieselben für die grössten Zenithdistanzen aus Argelander's Beobachtungen empirisch abgeleitet sind, so findet man, wenn die aus meiner Theorie folgenden Werthe angesetzt und dieselbe den oben gefundenen Coëfficienten entsprechend corrigirt (Columne Corr.) werden, folgende Zahlen:

z	Argel.	Oppolz.	Corr.	B—R
85° 0′	589″7	590″6	+ 0″2	−1″1
86 0	705·0	703·5	+ 0·3	+1·2
87 0	861·9	862·3	+ 0·9	−1·3
88 0	1097·8	1096·7	+ 3·6	−2·5
89 0	1476·9	1463·1	+11·5	+2·3
89 30	1758·0	1727·7	+28·5	+1·8,

so dass hier eine vollkommen befriedigende Übereinstimmung zu Tage tritt, und selbst für die Horizontalrefraction, welche nur auf zwei Sonnenbeobachtungen, die fast um eine Bogenminute von einander abweichen, beruht, keine grössere Differenz als 21″ gegen diesem so unsicheren Mittelwerthe übrig bleibt. Es möchte daher scheinen, dass durch die vorliegende provisorische Untersuchung jenes Glied, welches die mittlere tägliche Periode der Refraction darstellt, einigermassen festgestellt sei, doch will ich gleich hier bemerken, dass dies keineswegs der Fall sein kann, denn die aus diesen Annahmen für k und σ folgenden Temperaturverhältnisse in der Atmosphäre finden durch die meteorologischen Beobachtungen in keiner Weise eine Bestätigung, so dass man den obigen Zahlen keine andere Bedeutung als die einer empirischen Ausgleichung der betrachteten Differenz zuschreiben darf; es liessen sich allerdings wesentlich zusammengesetztere Formeln finden, welche eine Harmonie zwischen den astronomischen und meteorologischen Resultaten herstellen würden, doch würde dies zunächst den beabsichtigten Zwecken ferne liegen, auch müsste eine erneuerte Reduction der Beobachtungen vorgenommen werden, da die hier vorliegende Theorie, auf dieselben angewandt, wesentlich verschiedene Zahlen zu Tage fördern würde, denn z. B. gibt die hier entwickelte Theorie für die bekannte Bessel'sche λ-Grösse bei 90° Zenithdistanz nahezu 1·92, während nach Bessel 1·73 hiefür anzunehmen ist, so dass die für die Horizontalrefraction erhältlichen Bessel'schen Temperaturcorrectionen um nahezu den neunten Theil zu vergrössern wären.

Schliesslich wäre darauf noch aufmerksam zu machen, dass die hier ermittelte tägliche Periode ihren Einfluss nur für sehr grosse Zenithdistanzen geltend machen kann, für Zenithdistanzen bis zu 70° ist dieselbe selbst für die strengste Rechnung unmerklich; es ist schon oben (im zweiten Abschnitte) darauf aufmerksam gemacht worden, dass die hie und da beobachtete tägliche Periode der Refraction in verhältnissmässig kleinen Zenithdistanzen durch ganz andere Ursachen ihre Erklärung findet.

Tafel I.

y	$\log \Phi_0$		$\log \Phi_1$		$\log \Phi_2$		Φ_1	
−0·50	0·23810	−682	9_n6672	−251	9·459	−37		
−0·49	0·23128	−679	9_n6421	−253	9·422	−37		
−0·48	0·22449	−673	9_n6168	−253	9·385	−36		
−0·47	0·21776	−669	9_n5915	−254	9·349	−37		
−0·46	0·21107	−665	9_n5661	−256	9·312	−37		
−0·45	0·20442	−660	9_n5405	−257	9·275	−37		
−0·44	0·19782	−655	9_n5148	−259	9·238	−36		
−0·43	0·19127	−651	9_n4889	−260	9·202	−37		
−0·42	0·18476	−646	9_n4629	−262	9·165	−36		
−0·41	0·17830	−642	9_n4367	−264	9·129	−36		
−0·40	0·17188	−638	9_n4103	−266	9·093	−36		
−0·39	0·16550	−633	9_n3837	−269	9·057	−36		
−0·38	0·15917	−629	9_n3568	−270	9·021	−35		
−0·37	0·15288	−625	9_n3298	−273	8·986	−36		
−0·36	0·14663	−620	9_n3025	−276	8·950	−36		
−0·35	0·14043	−616	9_n2749	−278	8·914	−35		
−0·34	0·13427	−612	9_n2471	−282	8·879	−35		
−0·33	0·12815	−608	9_n2189	−285	8·844	−34		
−0·32	0·12207	−604	9_n1904	−288	8·810	−34		
−0·31	0·11603	−600	9_n1616	−293	8·776	−34		
−0·30	0·11003	−595	9_n1323	−296	8·742	−33		
−0·29	0·10408	−592	9_n1027	−301	8·709	−33		
−0·28	0·09816	−587	9_n0726	−306	8·676	−32		
−0·27	0·09229	−584	9_n0420	−311	8·644	−32		
−0·26	0·08645	−580	9_n0109	−317	8·612	−32		
−0·25	0·08065	−576	8_n9792	−324	8·580	−31		
−0·24	0·07489	−572	8_n9468	−330	8·549	−30		
−0·23	0·06917	−568	8_n9138	−338	8·519	−30		
−0·22	0·06349	−565	8_n8800	−346	8·489	−29		
−0·21	0·05784	−560	8_n8454	−355	8·460	−28		
−0·20	0·05224	−557	8_n8099	−366	8·432	−28	−0·06455	+522
−0·19	0·04667	−553	8_n7733	−377	8·404	−27	−0·05933	+493
−0·18	0·04114	−550	8_n7356	−390	8·377	−26	−0·05440	+467
−0·17	0·03564	−546	8_n6966	−404	8·351	−25	−0·04973	+442
−0·16	0·03018	−542	8_n6562	−421	8·326	−24	−0·04531	+419
−0·15	0·02476	−539	8_n6141	−439	8·302	−24	−0·04112	+395
−0·14	0·01937	−535	8_n5702	−462	8·278	−23	−0·03717	+375
−0·13	0·01402	−532	8_n5240	−486	8·255	−22	−0·03342	+354
−0·12	0·00870	−528	8_n4754	−516	8·233	−21	−0·02988	+334
−0·11	0·00342	−525	8_n4238	−551	8·212	−20	−0·02654	+317
−0·10	9·99817	−521	8_n3687	−595	8·192	−19	−0·02337	+299
−0·09	9·99296	−518	8_n3092	−647	8·173	−19	−0·02038	+282
−0·08	9·98778	−514	8_n2445	−716	8·154	−17	−0·01756	+267
−0·07	9·98264	−511	8_n1729	−804	8·137	−17	−0·01489	+252
−0·06	9·97753	−508	8_n0925	−927	8·120	−15	−0·01237	+237
−0·05	9·97245	−505	7_n9998	−1103	8·105	−15	−0·01000	+225
−0·04	9·96740	−501	7_n8895	−1383	8·090	−14	−0·00775	+211
−0·03	9·96239	−498	7_n7512	−1893	8·076	−14	−0·00564	+199
−0·02	9·95741	−495	7_n5619	−3143	8·062	−13	−0·00365	+188
−0·01	9·95246	−492	7_n2476	$-\infty$	8·049	−12	−0·00177	+177
0·00	9·94754		$-\infty$		8·037		0·00000	

Tafel I.

g	$\log \Phi_0$		$\log \Phi_1$		$\log \Phi_2$		Φ_1	
0·00	9·94754	−488	−∞	+∞	8·037	−11	0·00000	+166
+0·01	9·94266	−485	7·2213	+2880	8·026	−11	+0·00166	+157
+0·02	9·93781	−483	7·5093	+1631	8·015	−10	+0·00323	+147
+0·03	9·93298	−479	7·6724	+1120	8·005	−10	+0·00470	+139
+0·04	9·92819	−476	7·7844	+ 840	7·995	− 9	+0·00609	+130
+0·05	9·92343	−473	7·8684	+ 663	7·986	− 9	+0·00739	+121
+0·06	9·91870	−470	7·9347	+ 542	7·977	− 8	+0·00860	+115
+0·07	9·91400	−467	7·9889	+ 453	7·969	− 8	+0·00975	+107
+0·08	9·90933	−464	8·0342	+ 385	7·961	− 7	+0·01082	+100
+0·09	9·90469	−462	8·0727	+ 331	7·954	− 7	+0·01182	+ 94
+0·10	9·90007	−458	8·1058	+ 288	7·947	− 7	+0·01276	+ 87
+0·11	9·89549	−455	8·1346	+ 253	7·940	− 7	+0·01363	+ 82
+0·12	9·89094	−453	8·1599	+ 223	7·933	− 6	+0·01445	+ 76
+0·13	9·88641	−450	8·1822	+ 197	7·927	− 6	+0·01521	+ 71
+0·14	9·88191	−447	8·2019	+ 176	7·921	− 6	+0·01592	+ 66
+0·15	9·87744	−444	8·2195	+ 157	7·915	− 6	+0·01658	+ 61
+0·16	9·87300	−441	8·2352	+ 141	7·909	− 5	+0·01719	+ 56
+0·17	9·86859	−439	8·2493	+ 126	7·904	− 5	+0·01775	+ 53
+0·18	9·86420	−436	8·2619	+ 113	7·899	− 6	+0·01828	+ 48
+0·19	9·85984	−434	8·2732	+ 102	7·893	− 5	+0·01876	+ 44
+0·20	9·85550	−430	8·2834	+ 91	7·888	− 5	+0·01920	
+0·21	9·85120	−428	8·2925	+ 82	7·883	− 5		
+0·22	9·84692	−426	8·3007	+ 74	7·878	− 4		
+0·23	9·84266	−423	8·3081	+ 65	7·874	− 5		
+0·24	9·83843	−420	8·3146	+ 59	7·869	− 5		
+0·25	9·83423	−418	8·3205	+ 52	7·864	− 5		
+0·26	9·83005	−415	8·3257	+ 46	7·859	− 4		
+0·27	9·82590	−413	8·3303	+ 41	7·855	− 5		
+0·28	9·82177	−410	8·3344	+ 36	7·850	− 5		
+0·29	9·81767	−407	8·3380	+ 31	7·845	− 5		
+0·30	9·81360	−406	8·3411	+ 26	7·840	− 4		
+0·31	9·80954	−403	8·3437	+ 23	7·836	− 5		
+0·32	9·80551	−400	8·3460	+ 19	7·831	− 4		
+0·33	9·80151	−398	8·3479	+ 15	7·827	− 5		
+0·34	9·79753	−396	8·3494	+ 12	7·822	− 5		
+0·35	9·79357	−393	8·3506	+ 9	7·817	− 4		
+0·36	9·78964	−391	8·3515	+ 6	7·813	− 5		
+0·37	9·78573	−389	8·3521	+ 3	7·808	− 5		
+0·38	9·78184	−387	8·3524	+ 1	7·803	− 5		
+0·39	9·77797	−384	8·3525	− 2	7·798	− 5		
+0·40	9·77413	−382	8·3523	− 4	7·793	− 5		
+0·41	9·77031	−380	8·3519	− 6	7·788	− 5		
+0·42	9·76651	−377	8·3513	− 9	7·783	− 5		
+0·43	9·76274	−376	8·3504	− 10	7·778	− 5		
+0·44	9·75898	−373	8·3494	− 12	7·773	− 5		
+0·45	9·75525	−371	8·3482	− 13	7·768	− 5		
+0·46	9·75154	−369	8·3469	− 15	7·763	− 5		
+0·47	9·74785	−367	8·3454	− 17	7·758	− 6		
+0·48	9·74418	−365	8·3437	− 18	7·752	− 5		
+0·49	9·74053	−362	8·3419	− 20	7·747	− 5		
+0·50	9·73691		8·3399		7·742			

Tafel I.

g	$\log \Phi_0$		$\log \Phi_1$		$\log \Phi_2$	
+0·50	9·73691	—361	8·3399	—21	7·742	—6
+0·51	9·73330	—358	8·3378	—22	7·736	—5
+0·52	9·72972	—357	8·3356	—23	7·731	—5
+0·53	9·72615	—355	8·3333	—25	7·726	—6
+0·54	9·72260	—352	8·3308	—25	7·720	—5
+0·55	9·71908	—351	8·3283	—27	7·715	—6
+0·56	9·71557	—348	8·3256	—28	7·709	—5
+0·57	9·71209	—347	8·3228	—28	7·704	—6
+0·58	9·70862	—345	8·3200	—29	7·698	—6
+0·59	9·70517	—343	8·3171	—31	7·692	—6
+0·60	9·70174	—341	8·3140	—31	7·686	—5
+0·61	9·69833	—339	8·3109	—32	7·681	—6
+0·62	9·69494	—337	8·3077	—32	7·675	—6
+0·63	9·69157	—335	8·3045	—33	7·669	—6
+0·64	9·68822	—334	8·3012	—34	7·663	—5
+0·65	9·68488	—332	8·2978	—35	7·658	—6
+0·66	9·68156	—330	8·2943	—35	7·652	—6
+0·67	9·67826	—328	8·2908	—36	7·646	—6
+0·68	9·67498	—326	8·2872	—36	7·640	—6
+0·69	9·67172	—325	8·2836	—37	7·634	—6
+0·70	9·66847	—323	8·2799	—37	7·628	—7
+0·71	9·66524	—321	8·2762	—38	7·621	—6
+0·72	9·66203	—319	8·2724	—39	7·615	—6
+0·73	9·65884	—318	8·2685	—38	7·609	—6
+0·74	9·65566	—316	8·2647	—40	7·603	—6
+0·75	9·65250	—314	8·2607	—39	7·597	—6
+0·76	9·64936	—313	8·2568	—40	7·591	—7
+0·77	9·64623	—311	8·2528	—41	7·584	—6
+0·78	9·64312	—310	8·2487	—40	7·578	—6
+0·79	9·64002	—308	8·2447	—41	7·572	—7
+0·80	9·63694	—306	8·2406	—42	7·565	—6
+0·81	9·63388	—305	8·2364	—41	7·559	—6
+0·82	9·63083	—303	8·2323	—42	7·553	—7
+0·83	9·62780	—301	8·2281	—43	7·546	—6
+0·84	9·62479	—300	8·2238	—42	7·540	—6
+0·85	9·62179	—299	8·2196	—43	7·534	—7
+0·86	9·61880	—297	8·2153	—43	7·527	—6
+0·87	9·61583	—295	8·2110	—43	7·521	—7
+0·88	9·61288	—294	8·2067	—43	7·514	—6
+0·89	9·60994	—292	8·2024	—44	7·508	—7
+0·90	9·60702	—291	8·1980	—44	7·501	—6
+0·91	9·60411	—290	8·1936	—44	7·495	—7
+0·92	9·60121	—288	8·1892	—45	7·488	—6
+0·93	9·59833	—286	8·1847	—44	7·482	—7
+0·94	9·59547	—286	8·1803	—45	7·475	—6
+0·95	9·59261	—283	8·1758	—44	7·469	—7
+0·96	9·58978	—283	8·1714	—45	7·462	—7
+0·97	9·58695	—281	8·1669	—45	7·455	—6
+0·98	9·58414	—279	8·1624	—45	7·449	—7
+0·99	9·58135	—278	8·1579	—45	7·442	—7
+1·00	9·57857		8·1534		7·435	

Tafel I.

$\log y$	$\log \Phi_0$		$\log \Phi_1$		$\log \Phi_2$	
0·00	9·57857	−643	8·1534	−106	7·435	−16
0·01	9·57214	−650	8·1428	−109	7·419	−15
0·02	9·56564	−658	8·1319	−112	7·404	−16
0·03	9·55906	−665	8·1207	−115	7·388	−17
0·04	9·55241	−672	8·1092	−118	7·371	−17
0·05	9·54569	−680	8·0974	−121	7·354	−18
0·06	9·53889	−687	8·0853	−124	7·336	−18
0·07	9·53202	−694	8·0729	−127	7·318	−18
0·08	9·52508	−701	8·0602	−130	7·300	−19
0·09	9·51807	−708	8·0472	−134	7·281	−20
0·10	9·51099	−716	8·0338	−136	7·261	−20
0·11	9·50383	−722	8·0202	−140	7·241	−20
0·12	9·49661	−729	8·0062	−142	7·221	−21
0·13	9·48932	−736	7·9920	−146	7·200	−21
0·14	9·48196	−743	7·9774	−149	7·179	−22
0·15	9·47453	−749	7·9625	−152	7·157	−22
0·16	9·46704	−756	7·9473	−155	7·135	−22
0·17	9·45948	−763	7·9318	−157	7·113	−23
0·18	9·45185	−769	7·9161	−161	7·090	−23
0·19	9·44416	−775	7·9000	−164	7·067	−24
0·20	9·43641	−781	7·8836	−167	7·043	−25
0·21	9·42860	−788	7·8669	−170	7·018	−25
0·22	9·42072	−794	7·8499	−173	6·993	−26
0·23	9·41278	−799	7·8326	−175	6·967	−26
0·24	9·40479	−806	7·8151	−179	6·941	−27
0·25	9·39673	−811	7·7972	−181	6·914	−27
0·26	9·38862	−817	7·7791	−184	6·887	−27
0·27	9·38045	−822	7·7607	−187	6·860	−28
0·28	9·37223	−828	7·7420	−190	6·832	−28
0·29	9·36395	−833	7·7230	−193	6·804	−29
0·30	9·35562	−838	7·7037	−196	6·775	−29
0·31	9·34724	−844	7·6841	−198	6·746	−29
0·32	9·33880	−848	7·6643	−201	6·717	−30
0·33	9·33032	−854	7·6442	−203	6·687	−31
0·34	9·32178	−858	7·6239	−206	6·656	−31
0·35	9·31320	−863	7·6033	−209	6·625	−32
0·36	9·30457	−867	7·5824	−211	6·593	−32
0·37	9·29590	−872	7·5613	−214	6·561	−32
0·38	9·28718	−876	7·5399	−217	6·529	−33
0·39	9·27842	−881	7·5182	−219	6·496	−34
0·40	9·26961	−884	7·4963	−221	6·462	−3
0·41	9·26077	−889	7·4742	−224	6·43	−3
0·42	9·25188	−893	7·4518	−225	6·40	−4
0·43	9·24295	−896	7·4293	−228	6·36	−4
0·44	9·23399	−900	7·4065	−230	6·32	−3
0·45	9·22499	−904	7·3835	−233	6·29	−4
0·46	9·21595	−907	7·3602	−235	6·25	−4
0·47	9·20688	−910	7·3367	−236	6·21	−3
0·48	9·19778	−914	7·3131	−239	6·18	−4
0·49	9·18864	−917	7·2892	−240	6·14	−4
0·50	9·17947		7·2652		6·10	

Tafel I.

log g	log Φ_0		log Φ_1		log Φ_2	
0·50	9·17947	−920	7·2652	−242	6·10	−4
0·51	9·17027	−924	7·2410	−244	6·06	−3
0·52	9·16103	−926	7·2166	−246	6·03	−4
0·53	9·15177	−928	7·1920	−248	5·99	−3
0·54	9·14249	−932	7·1672	−250	5·96	−4
0·55	9·13317	−934	7·1422	−251	5·92	−4
0·56	9·12383	−937	7·1171	−254	5·88	−4
0·57	9·11446	−939	7·0917	−255	5·84	−4
0·58	9·10507	−942	7·0662	−257	5·80	−5
0·59	9·09565	−944	7·0405	−258	5·75	−4
0·60	9·08621	−946	7·0147	−260	5·71	−5
0·61	9·07675	−948	6·9887	−262	5·66	−4
0·62	9·06727	−951	6·9625	−263	5·62	−4
0·63	9·05776	−952	6·9362	−265	5·58	−4
0·64	9·04824	−954	6·9097	−266	5·54	−4
0·65	9·03870	−956	6·8831	−267	5·50	−4
0·66	9·02914	−958	6·8564	−268	5·46	−5
0·67	9·01956	−960	6·8296	−269	5·41	−4
0·68	9·00996	−961	6·8027	−270	5·37	−4
0·69	9·00035	−963	6·7757	−271	5·33	−4
0·70	8·99072	−965	6·7486	−272	5·29	−5
0·71	8·98107	−965	6·7214	−274	5·24	−4
0·72	8·97142	−968	6·6940	−274	5·20	−4
0·73	8·96174	−968	6·6666	−276	5·16	−5
0·74	8·95206	−970	6·6390	−277	5·11	−4
0·75	8·94236	−972	6·6113	−278	5·07	−5
0·76	8·93264	−972	6·5835	−279	5·02	−4
0·77	8·92292	−974	6·5556	−279	4·98	−5
0·78	8·91318	−974	6·5277	−280	4·93	−5
0·79	8·90344	−976	6·4997	−281	4·88	−4
0·80	8·89368	−977	6·4716	−282	4·84	−5
0·81	8·88391	−978	6·4434	−282	4·79	−4
0·82	8·87413	−979	6·4152	−283	4·75	−5
0·83	8·86434	−979	6·3869	−284	4·70	−5
0·84	8·85455	−981	6·3585	−285	4·65	−4
0·85	8·84474	−981	6·3300	−285	4·61	−5
0·86	8·83493	−983	6·3015	−286	4·56	−5
0·87	8·82510	−982	6·2729	−286	4·51	−4
0·88	8·81528	−984	6·2443	−287	4·47	−5
0·89	8·80544	−985	6·2156	−287	4·42	−5
0·90	8·79559	−985	6·1869	−288	4·37	−4
0·91	8·78574	−985	6·1581	−289	4·33	−5
0·92	8·77589	−987	6·1292	−289	4·28	−5
0·93	8·76602	−987	6·1003	−290	4·23	−5
0·94	8·75615	−987	6·0713	−290	4·18	−4
0·95	8·74628	−988	6·0423	−290	4·14	−5
0·96	8·73640	−989	6·0133	−291	4·09	−5
0·97	8·72651	−989	5·9842	−291	4·04	−5
0·98	8·71662	−989	5·9551	−291	3·99	−5
0·99	8·70673	−991	5·9260	−292	3·94	−4
1·00	8·69682		5·8968		3·90	

Tafel II.

g	φ_1		φ_2		$\log \varphi_3$		φ_4		φ_5		φ_6	
−0·50	−0·183	−15	+0·008	−17	0„242	−15	−0·148	+16	−0·441	+41	−0·279	+25
−0·49	−0·198	−14	−0·009	−16	0„227	−16	−0·132	+16	−0·400	+38	−0·254	+23
−0·48	−0·212	−14	−0·025	−15	0„211	−15	−0·116	+15	−0·362	+35	−0·231	+22
−0·47	−0·226	−13	−0·040	−14	0„196	−15	−0·101	+14	−0·327	+33	−0·209	+19
−0·46	−0·239	−12	−0·054	−14	0„181	−15	−0·087	+13	−0·294	+31	−0·190	+19
−0·45	−0·251	−12	−0·068	−13	0„166	−15	−0·074	+13	−0·263	+29	−0·171	+17
−0·44	−0·263	−11	−0·081	−12	0„151	−15	−0·061	+12	−0·234	+28	−0·154	+16
−0·43	−0·274	−11	−0·093	−11	0„136	−15	−0·049	+11	−0·206	+25	−0·138	+15
−0·42	−0·285	−10	−0·104	−11	0„121	−15	−0·038	+10	−0·181	+24	−0·123	+13
−0·41	−0·295	−10	−0·115	−10	0„106	−14	−0·028	+10	−0·157	+22	−0·110	+13
−0·40	−0·305	−9	−0·125	−10	0„092	−15	−0·018	+9	−0·135	+21	−0·097	+12
−0·39	−0·314	−9	−0·135	−9	0„077	−14	−0·009	+9	−0·114	+19	−0·085	+11
−0·38	−0·323	−8	−0·144	−8	0„063	−15	0·000	+8	−0·095	+18	−0·074	+10
−0·37	−0·331	−8	−0·152	−8	0„048	−14	+0·008	+8	−0·077	+17	−0·064	+9
−0·36	−0·339	−8	−0·160	−8	0„034	−15	+0·016	+7	−0·060	+16	−0·055	+9
−0·35	−0·347	−7	−0·168	−7	0„019	−14	+0·023	+7	−0·044	+15	−0·046	+8
−0·34	−0·354	−6	−0·175	−7	0„005	−14	+0·030	+7	−0·029	+13	−0·038	+7
−0·33	−0·360	−7	−0·182	−6	9„991	−14	+0·037	+6	−0·016	+13	−0·031	+7
−0·32	−0·367	−5	−0·188	−6	9„977	−14	+0·043	+5	−0·003	+12	−0·024	+6
−0·31	−0·372	−6	−0·194	−5	9„963	−14	+0·048	+6	+0·009	+11	−0·018	+6
−0·30	−0·378	−5	−0·199	−6	9„949	−14	+0·054	+5	+0·020	+10	−0·012	+5
−0·29	−0·383	−5	−0·205	−4	9„935	−13	+0·059	+4	+0·030	+9	−0·007	+5
−0·28	−0·388	−5	−0·209	−5	9„922	−14	+0·063	+5	+0·039	+9	−0·002	+5
−0·27	−0·393	−5	−0·214	−4	9„908	−14	+0·068	+4	+0·048	+8	+0·003	+4
−0·26	−0·398	−4	−0·218	−4	9„894	−13	+0·072	+3	+0·056	+7	+0·007	+4
−0·25	−0·402	−4	−0·222	−4	9„881	−14	+0·075	+4	+0·063	+7	+0·011	+3
−0·24	−0·406	−3	−0·226	−3	9„867	−13	+0·079	+3	+0·070	+7	+0·014	+3
−0·23	−0·409	−4	−0·229	−3	9„854	−13	+0·082	+3	+0·077	+6	+0·017	+3
−0·22	−0·413	−3	−0·232	−3	9„841	−14	+0·085	+3	+0·083	+5	+0·020	+3
−0·21	−0·416	−3	−0·235	−3	9„827	−13	+0·088	+3	+0·088	+5	+0·023	+2
−0·20	−0·419	−2	−0·238	−2	9„814	−13	+0·091	+2	+0·093	+4	+0·025	+2
−0·19	−0·421	−3	−0·240	−3	9„801	−13	+0·093	+2	+0·097	+4	+0·027	+2
−0·18	−0·424	−2	−0·243	−2	9„788	−13	+0·095	+2	+0·101	+4	+0·029	+2
−0·17	−0·426	−2	−0·245	−2	9„775	−13	+0·097	+2	+0·105	+4	+0·031	+2
−0·16	−0·428	−2	−0·247	−1	9„762	−13	+0·099	+2	+0·109	+3	+0·033	+1
−0·15	−0·430	−2	−0·248	−2	9„749	−12	+0·101	+1	+0·112	+2	+0·034	+2
−0·14	−0·432	−2	−0·250	−2	9„737	−13	+0·102	+2	+0·114	+3	+0·036	+1
−0·13	−0·434	−1	−0·252	−1	9„724	−13	+0·104	+1	+0·117	+2	+0·037	+1
−0·12	−0·435	−2	−0·253	−1	9„711	−12	+0·105	+1	+0·119	+2	+0·038	+1
−0·11	−0·437	−1	−0·254	−1	9„699	−13	+0·106	+1	+0·121	+2	+0·039	0
−0·10	−0·438	−1	−0·255	−1	9„686	−12	+0·107	+1	+0·123	+1	+0·039	+1
−0·09	−0·439	−1	−0·256	−1	9„674	−13	+0·108	0	+0·124	+2	+0·040	+1
−0·08	−0·440	−1	−0·257	0	9„661	−12	+0·108	+1	+0·126	+1	+0·041	0
−0·07	−0·441	0	−0·257	−1	9„649	−12	+0·109	0	+0·127	0	+0·041	+1
−0·06	−0·441	−1	−0·258	0	9„637	−12	+0·109	+1	+0·127	+1	+0·042	0
−0·05	−0·442	0	−0·258	−1	9„625	−12	+0·110	0	+0·128	+1	+0·042	0
−0·04	−0·442	−1	−0·259	0	9„613	−12	+0·110	+1	+0·129	0	+0·042	+1
−0·03	−0·443	0	−0·259	0	9„601	−12	+0·111	0	+0·129	+1	+0·043	0
0·02	−0·443	0	−0·259	−1	9„589	−12	+0·111	0	+0·130	0	+0·043	0
0·01	−0·443	0	−0·260	0	9„577	−12	+0·111	0	+0·130	0	+0·043	0
0·00	−0·443		−0·260		9„565		+0·111		+0·130		+0·043	

Tafel II.

g	$\log \varphi_1$		$\log \varphi_2$		$\log \varphi_3$		$\log \varphi_4$		$\log \varphi_5$		$\log \varphi_6$	
0·00	9_n647	0	9_n414	0	9_n565	−12	9·045	−1	9·113	0	8·630	0
+0·01	9_n647	−1	9_n414	0	9_n553	−12	9·044	0	9·113	−1	8·630	0
+0·02	9_n646	0	9_n414	0	9_n541	−11	9·044	−1	9·112	0	8·630	−1
+0·03	9_n646	0	9_n414	−1	9_n530	−12	9·043	−1	9·112	−1	8·629	−2
+0·04	9_n646	0	9_n413	0	9_n518	−12	9·042	−1	9·111	−2	8·627	−2
+0·05	9_n646	−1	9_n413	−1	9_n506	−11	9·041	−1	9·109	−2	8·625	−2
+0·06	9_n645	0	9_n412	0	9_n495	−12	9·040	−1	9·107	−1	8·623	−3
+0·07	9_n645	−1	9_n412	−1	9_n483	−11	9·039	−2	9·106	−3	8·620	−2
+0·08	9_n644	−1	9_n411	−1	9_n472	−11	9·037	−2	9·103	−2	8·618	−3
+0·09	9_n643	0	9_n410	−1	9_n461	−12	9·035	−1	9·101	−3	8·615	−3
+0·10	9_n643	−1	9_n409	−1	9_n449	−11	9·034	−2	9·098	−2	8·612	−4
+0·11	9_n642	−1	9_n408	−1	9_n438	−11	9·032	−3	9·096	−3	8·608	−4
+0·12	9_n641	−1	9_n407	−1	9_n427	−11	9·029	−2	9·093	−3	8·604	−4
+0·13	9_n640	0	9_n406	−1	9_n416	−11	9·027	−3	9·090	−4	8·600	−4
+0·14	9_n640	−1	9_n405	−2	9_n405	−12	9·024	−2	9·086	−3	8·596	−4
+0·15	9_n639	−1	9_n403	−1	9_n393	−10	9·022	−3	9·083	−4	8·592	−4
+0·16	9_n638	−1	9_n402	−1	9_n383	−11	9·019	−3	9·079	−3	8·588	−5
+0·17	9_n637	−1	9_n401	−2	9_n372	−11	9·016	−3	9·076	−4	8·583	−5
+0·18	9_n636	−2	9_n399	−1	9_n361	−10	9·013	−3	9·072	−4	8·578	−5
+0·19	9_n634	−1	9_n398	−2	9_n351	−11	9·010	−3	9·068	−4	8·573	−5
+0·20	9_n633	−1	9_n396	−1	9_n340	−11	9·007	−3	9·064	−4	8·568	−5
+0·21	9_n632	−1	9_n395	−2	9_n329	−10	9·004	−3	9·060	−5	8·563	−5
+0·22	9_n631	−1	9_n393	−1	9_n319	−11	9·001	−4	9·055	−4	8·558	−5
+0·23	9_n630	−2	9_n392	−2	9_n308	−11	8·997	−3	9·051	−5	8·553	−6
+0·24	9_n628	−1	9_n390	−2	9_n297	−10	8·994	−4	9·046	−4	8·547	−5
+0·25	9_n627	−1	9_n388	−1	9_n287	−10	8·990	−3	9·042	−5	8·542	−6
+0·26	9_n626	−2	9_n387	−2	9_n277	−11	8·987	−4	9·037	−4	8·536	−5
+0·27	9_n624	−1	9_n385	−2	9_n266	−10	8·983	−4	9·033	−5	8·531	−6
+0·28	9_n623	−2	9_n383	−2	9_n256	−10	8·979	−3	9·028	−5	8·525	−6
+0·29	9_n621	−1	9_n381	−2	9_n246	−10	8·976	−4	9·023	−5	8·519	−6
+0·30	9_n620	−1	9_n379	−2	9_n236	−11	8·972	−4	9·018	−5	8·513	−6
+0·31	9_n619	−2	9_n377	−2	9_n225	−10	8·968	−4	9·013	−5	8·507	−6
+0·32	9_n617	−1	9_n375	−1	9_n215	−10	8·964	−4	9·008	−5	8·501	−6
+0·33	9_n616	−2	9_n374	−2	9_n205	−10	8·960	−4	9·003	−5	8·495	−6
+0·34	9_n614	−2	9_n372	−2	9_n195	−10	8·956	−5	8·998	−5	8·489	−6
+0·35	9_n612	−1	9_n370	−2	9_n185	−10	8·951	−4	8·993	−6	8·483	−7
+0·36	9_n611	−2	9_n368	−2	9_n175	−9	8·947	−4	8·987	−5	8·476	−6
+0·37	9_n609	−1	9_n366	−2	9_n166	−10	8·943	−4	8·982	−5	8·470	−6
+0·38	9_n608	−2	9_n364	−2	9_n156	−10	8·939	−5	8·977	−5	8·464	−6
+0·39	9_n606	−2	9_n362	−3	9_n146	−10	8·934	−4	8·972	−6	8·458	−7
+0·40	9_n604	−1	9_n359	−2	9_n136	−9	8·930	−4	8·966	−5	8·451	−6
+0·41	9_n603	−2	9_n357	−2	9_n127	−10	8·926	−5	8·961	−6	8·445	−7
+0·42	9_n601	−2	9_n355	−2	9_n117	−10	8·921	−4	8·955	−5	8·438	−6
+0·43	9_n599	−1	9_n353	−2	9_n107	−9	8·917	−5	8·950	−6	8·432	−7
+0·44	9_n598	−2	9_n351	−2	9_n098	−10	8·912	−4	8·944	−5	8·425	−6
+0·45	9_n596	−2	9_n349	−2	9_n088	−10	8·908	−5	8·939	−6	8·419	−7
+0·46	9_n594	−2	9_n347	−2	9_n078	−9	8·903	−4	8·933	−6	8·412	−6
+0·47	9_n592	−1	9_n345	−3	9_n069	−9	8·899	−5	8·927	−5	8·406	−7
+0·48	9_n591	−2	9_n342	−2	9_n060	−9	8·894	−5	8·922	−6	8·399	−7
+0·49	9_n589	−2	9_n340	−2	9_n051	−9	8·889	−4	8·916	−5	8·392	−6
+0·50	9_n587		9_n338		9_n042		8·885		8·911		8·386	

Tafel II.

y	log φ_1		log φ_2		log φ_3		log φ_4		log φ_5		log φ_6	
+0·50	9_n587	−2	9_n338	−2	9_n042	−10	8·885	−5	8·911	−6	8·386	−7
+0·51	9_n585	−2	9_n336	−2	9_n032	−9	8·880	−5	8·905	−6	8·379	−6
+0·52	9_n583	−1	9_n334	−3	9_n023	−9	8·875	−5	8·899	−5	8·373	−7
+0·53	9_n582	−2	9_n331	−2	9_n014	−9	8·870	−4	8·894	−6	8·366	−7
+0·54	9_n580	−2	9_n329	−2	9_n005	−9	8·866	−5	8·888	−6	8·359	−6
+0·55	9_n578	−2	9_n327	−2	8_n996	−9	8·861	−5	8·882	−6	8·353	−7
+0·56	9_n576	−2	9_n325	−2	8_n987	−9	8·856	−4	8·876	−6	8·346	−7
+0·57	9_n574	−2	9_n323	−3	8_n978	−9	8·852	−5	8·870	−5	8·339	−7
+0·58	9_n572	−1	9_n320	−2	8_n969	−9	8·847	−5	8·865	−6	8·332	−6
+0·59	9_n571	−2	9_n318	−2	8_n960	−9	8·842	−5	8·859	−6	8·326	−7
+0·60	9_n569	−2	9_n316	−2	8_n951	−9	8·837	−5	8·853	−6	8·319	−7
+0·61	9_n567	−2	9_n314	−3	8_n942	−8	8·832	−5	8·847	−6	8·312	−6
+0·62	9_n565	−2	9_n311	−2	8_n934	−9	8·827	−5	8·841	−5	8·306	−7
+0·63	9_n563	−2	9_n309	−2	8_n925	−9	8·822	−5	8·836	−6	8·299	−7
+0·64	9_n561	−2	9_n307	−3	8_n916	−8	8·817	−4	8·830	−6	8·292	−6
+0·65	9_n559	−2	9_n304	−2	8_n908	−9	8·813	−5	8·824	−6	8·286	−7
+0·66	9_n557	−1	9_n302	−2	8_n899	−9	8·808	−5	8·818	−6	8·279	−7
+0·67	9_n556	−2	9_n300	−2	8_n890	−8	8·803	−5	8·812	−6	8·272	−7
+0·68	9_n554	−2	9_n298	−3	8_n882	−9	8·798	−5	8·806	−6	8·265	−6
+0·69	9_n552	−2	9_n295	−2	8_n873	−8	8·793	−5	8·800	−5	8·259	−7
+0·70	9_n550	−2	9_n293	−2	8_n865	−9	8·788	−5	8·795	−6	8·252	−7
+0·71	9_n548	−2	9_n291	−2	8_n856	−8	8·783	−5	8·789	−6	8·245	−6
+0·72	9_n546	−2	9_n289	−3	8_n848	−8	8·778	−5	8·783	−6	8·239	−7
+0·73	9_n544	−2	9_n286	−2	8_n840	−9	8·773	−5	8·777	−6	8·232	−7
+0·74	9_n542	−2	9_n284	−2	8_n831	−8	8·768	−5	8·771	−6	8·225	−6
+0·75	9_n540	−2	9_n282	−2	8_n823	−8	8·763	−5	8·765	−6	8·219	−7
+0·76	9_n538	−2	9_n280	−3	8_n815	−8	8·758	−5	8·759	−5	8·212	−7
+0·77	9_n536	−2	9_n277	−2	8_n807	−8	8·753	−5	8·754	−6	8·205	−6
+0·78	9_n534	−1	9_n275	−2	8_n799	−9	8·748	−5	8·748	−6	8·199	−7
+0·79	9_n533	−2	9_n273	−3	8_n790	−8	8·743	−5	8·742	−6	8·192	−6
+0·80	9_n531	−2	9_n270	−2	8_n782	−8	8·738	−5	8·736	−6	8·186	−7
+0·81	9_n529	−2	9_n268	−2	8_n774	−8	8·733	−5	8·730	−6	8·179	−7
+0·82	9_n527	−2	9_n266	−2	8_n766	−8	8·728	−5	8·724	−6	8·172	−6
+0·83	9_n525	−2	9_n264	−3	8_n758	−8	8·723	−5	8·718	−5	8·166	−7
+0·84	9_n523	−2	9_n261	−2	8_n750	−8	8·718	−5	8·713	−6	8·159	−6
+0·85	9_n521	−2	9_n259	−2	8_n742	−7	8·713	−5	8·707	−6	8·153	−7
+0·86	9_n519	−2	9_n257	−2	8_n735	−8	8·708	−5	8·701	−6	8·146	−7
+0·87	9_n517	−2	9_n255	−3	8_n727	−8	8·703	−5	8·695	−6	8·139	−6
+0·88	9_n515	−2	9_n252	−2	8_n719	−8	8·698	−5	8·689	−6	8·133	−7
+0·89	9_n513	−2	9_n250	−2	8_n711	−8	8·693	−5	8·683	−5	8·126	−6
+0·90	9_n511	−2	9_n248	−2	8_n703	−7	8·688	−5	8·678	−6	8·120	−7
+0·91	9_n509	−2	9_n246	−2	8_n696	−8	8·683	−5	8·672	−6	8·113	−6
+0·92	9_n507	−1	9_n244	−3	8_n688	−8	8·678	−5	8·666	−6	8·107	−7
+0·93	9_n506	−2	9_n241	−2	8_n680	−7	8·673	−5	8·660	−6	8·100	−6
+0·94	9_n504	−2	9_n239	−2	8_n673	−8	8·668	−5	8·654	−5	8·094	−6
+0·95	9_n502	−2	9_n237	−2	8_n665	−7	8·663	−5	8·649	−6	8·088	−7
+0·96	9_n500	−2	9_n235	−3	8_n658	−8	8·658	−5	8·643	−6	8·081	−6
+0·97	9_n498	−2	9_n232	−2	8_n650	−7	8·653	−5	8·637	−6	8·075	−7
+0·98	9_n496	−2	9_n230	−2	8_n643	−8	8·648	−5	8·631	−5	8·068	−6
+0·99	9_n494	−2	9_n228	−2	8_n635	−7	8·643	−5	8·626	−6	8·062	−6
+1·00	9_n492		9_n226		8_n628		8·638		8·620		8·056	

Tafel II.

log q	log φ_1		log φ_2		log φ_3		log φ_4		log φ_5		log φ_6	
0·00	9_n492	−4	9_n226	−5	8_n628	−17	8·638	−12	8·620	−13	8·056	−15
0·01	9_n488	−5	9_n221	−5	8_n611	−18	8·626	−12	8·607	−14	8·041	−15
0·02	9_n483	−5	9_n216	−5	8_n593	−18	8·614	−12	8·593	−13	8·026	−15
0·03	9_n478	−4	9_n211	−6	8_n575	−17	8·602	−12	8·580	−14	8·011	−16
0·04	9_n474	−5	9_n205	−5	8_n558	−18	8·590	−13	8·566	−15	7·995	−16
0·05	9_n469	−5	9_n200	−6	8_n540	−19	8·577	−13	8·551	−15	7·979	−16
0·06	9_n464	−5	9_n194	−6	8_n521	−18	8·564	−13	8·536	−14	7·963	−16
0·07	9_n459	−5	9_n188	−5	8_n503	−19	8·551	−13	8·522	−16	7·947	−17
0·08	9_n454	−5	9_n183	−6	8_n484	−19	8·538	−14	8·506	−15	7·930	−17
0·09	9_n449	−6	9_n177	−6	8_n465	−19	8·524	−14	8·491	−16	7·913	−17
0·10	9_n443	−5	9_n171	−6	8_n446	−20	8·510	−14	8·475	−16	7·896	−17
0·11	9_n438	−5	9_n165	−6	8_n426	−19	8·496	−15	8·459	−16	7·879	−18
0·12	9_n433	−6	9_n159	−7	8_n407	−20	8·481	−14	8·443	−16	7·861	−18
0·13	9_n427	−6	9_n152	−6	8_n387	−20	8·467	−15	8·427	−17	7·843	−18
0·14	9_n421	−6	9_n146	−6	8_n367	−21	8·452	−16	8·410	−17	7·825	−19
0·15	9_n415	−5	9_n140	−7	8_n346	−20	8·436	−15	8·393	−17	7·806	−18
0·16	9_n410	−6	9_n133	−6	8_n326	−21	8·421	−16	8·376	−18	7·788	−19
0·17	9_n404	−6	9_n127	−7	8_n305	−21	8·405	−16	8·358	−17	7·769	−19
0·18	9_n398	−6	9_n120	−6	8_n284	−21	8·389	−16	8·341	−18	7·750	−20
0·19	9_n392	−7	9_n114	−7	8_n263	−22	8·373	−17	8·323	−19	7·730	−20
0·20	9_n385	−6	9_n107	−7	8_n241	−21	8·356	−17	8·304	−18	7·710	−20
0·21	9_n379	−6	9_n100	−7	8_n220	−22	8·339	−17	8·286	−19	7·690	−20
0·22	9_n373	−7	9_n093	−7	8_n198	−22	8·322	−17	8·267	−19	7·670	−20
0·23	9_n366	−6	9_n086	−7	8_n176	−23	8·305	−18	8·248	−19	7·650	−21
0·24	9_n360	−7	9_n079	−8	8_n153	−22	8·287	−18	8·229	−20	7·629	−21
0·25	9_n353	−7	9_n071	−7	8_n131	−23	8·269	−18	8·209	−20	7·608	−21
0·26	9_n346	−7	9_n064	−7	8_n108	−22	8·251	−19	8·189	−20	7·587	−21
0·27	9_n339	−7	9_n057	−8	8_n086	−24	8·232	−18	8·169	−20	7·566	−22
0·28	9_n332	−7	9_n049	−7	8_n062	−23	8·214	−19	8·149	−21	7·544	−22
0·29	9_n325	−7	9_n042	−8	8_n039	−23	8·195	−20	8·128	−20	7·522	−22
0·30	9_n318	−7	9_n034	−8	8_n016	−24	8·175	−19	8·108	−21	7·500	−22
0·31	9_n311	−7	9_n026	−7	7_n992	−24	8·156	−20	8·087	−22	7·478	−23
0·32	9_n304	−7	9_n019	−8	7_n968	−24	8·136	−20	8·065	−21	7·455	−22
0·33	9_n297	−8	9_n011	−8	7_n944	−24	8·116	−20	8·044	−22	7·433	−23
0·34	9_n289	−7	9_n003	−8	7_n920	−24	8·096	−21	8·022	−22	7·410	−23
0·35	9_n282	−8	8_n995	−8	7_n896	−24	8·075	−21	8·000	−22	7·387	−24
0·36	9_n274	−7	8_n987	−8	7_n872	−25	8·054	−21	7·978	−22	7·363	−23
0·37	9_n267	−8	8_n979	−8	7_n847	−25	8·033	−21	7·956	−23	7·340	−24
0·38	9_n259	−8	8_n971	−8	7_n822	−25	8·012	−21	7·933	−23	7·316	−24
0·39	9_n251	−8	8_n963	−9	7_n797	−25	7·991	−22	7·910	−23	7·292	−24
0·40	9_n243	−8	8_n954	−8	7_n772	−25	7·969	−22	7·887	−23	7·268	−24
0·41	9_n235	−8	8_n946	−8	7_n747	−26	7·947	−22	7·864	−24	7·244	−25
0·42	9_n227	−8	8_n938	−9	7_n721	−25	7·925	−22	7·840	−23	7·219	−25
0·43	9_n219	−8	8_n929	−8	7_n696	−26	7·903	−23	7·817	−24	7·194	−24
0·44	9_n211	−8	8_n921	−9	7_n670	−26	7·880	−23	7·793	−24	7·170	−25
0·45	9_n203	−8	8_n912	−8	7_n644	−26	7·857	−23	7·769	−24	7·145	−26
0·46	9_n195	−8	8_n904	−9	7_n618	−26	7·834	−23	7·745	−25	7·119	−25
0·47	9_n187	−9	8_n895	−9	7_n592	−26	7·811	−24	7·720	−24	7·094	−25
0·48	9_n178	−8	8_n886	−8	7_n566	−27	7·787	−24	7·696	−25	7·069	−26
0·49	9_n170	−9	8_n878	−9	7_n539	−26	7·763	−24	7·671	−25	7·043	−26
0·50	9_n161		8_n869		7_n513		7·739		7·646		7·017	

Tafel II.

log g	log φ_1		log φ_2		log φ_3		log φ_4		log φ_5		log φ_6	
0·50	9_n161	−8	8_n869	−9	8_n513	−27	7·739	−25	7·646	25	7·017	−26
0·51	9_n153	−9	8_n860	−9	7_n486	−27	7·714	24	7·621	−25	6·991	−26
0·52	9_n144	−8	8_n851	9	7_n459	−27	7·690	−25	7·596	26	6·965	−26
0·53	9_n136	−9	8_n842	−9	7_n432	−27	7·665	−24	7·570	25	6·939	26
0·54	9_n127	−9	8_n833	−9	7_n405	27	7·641	25	7·545	26	6·913	−27
0·55	9_n118	−8	8_n824	−9	7_n378	−27	7·616	−24	7·519	−26	6·886	−27
0·56	9_n110	−9	8_n815	−9	7_n351	−27	7·592	−26	7·493	26	6·859	−26
0·57	9_n101	−9	8_n806	−9	7_n324	−28	7·566	25	7·467	26	6·833	−27
0·58	9_n092	9	8_n797	−9	7_n296	−27	7·541	26	7·441	26	6·806	−27
0·59	9_n083	−9	8_n788	−9	7_n269	−28	7·515	−25	7·415	27	6·779	−27
0·60	9_n074	−9	8_n779	−9	7_n241	28	7·490	−25	7·388	−26	6·752	−28
0·61	9_n065	−9	8_n770	−9	7_n213	−27	7·465	−26	7·362	27	6·724	−27
0·62	9_n056	−9	8_n761	10	7_n186	−28	7·439	−26	7·335	−27	6·697	−27
0·63	9_n047	−9	8_n751	9	7_n158	−28	7·413	−25	7·308	−27	6·670	−28
0·64	9_n038	−9	8_n742	9	7_n130	−28	7·388	27	7·281	−27	6·642	−27
0·65	9_n029	−9	8_n733	10	7_n102	−28	7·361	−26	7·254	−27	6·615	−28
0·66	9_n020	−10	8_n723	−9	7_n074	−29	7·335	−27	7·227	−27	6·587	−28
0·67	9_n010	−9	8_n714	−10	7_n045	−28	7·308	−28	7·200	−28	6·559	−28
0·68	9_n001	−9	8_n704	−9	7_n017	−28	7·280	−26	7·172	−27	6·531	−28
0·69	8_n992	−9	8_n695	−9	6_n989	−29	7·254	26	7·145	−28	6·503	−28
0·70	8_n983	−10	8_n686	−10	6_n960	−28	7·228	−26	7·117	−28	6·475	−28
0·71	8_n973	−9	8_n676	−9	6_n932	−29	7·202	−27	7·089	27	6·447	−28
0·72	8_n964	−9	8_n667	10	6_n903	−28	7·175	−26	7·062	28	6·419	−29
0·73	8_n955	10	8_n657	−9	6_n875	−29	7·149	−26	7·034	28	6·390	−28
0·74	8_n945	9	8_n648	−10	6_n846	−28	7·123	−27	7·006	28	6·362	−29
0·75	8_n936	−10	8_n638	−10	6_n818	29	7·096	−27	6·978	−28	6·333	−28
0·76	8_n926	−9	8_n628	−9	6_n789	−29	7·069	−29	6·950	28	6·305	−29
0·77	8_n917	−10	8_n619	−10	6_n760	−29	7·040	−29	6·922	29	6·276	−28
0·78	8_n907	−9	8_n609	−9	6_n731	−29	7·011	−29	6·893	−28	6·248	−29
0·79	8_n898	−10	8_n600	−10	6_n702	−29	6·982	−29	6·865	28	6·219	−29
0·80	8_n888	−9	8_n590	−10	6_n673	−29	6·953	−29	6·837	−28	6·190	−28
0·81	8_n879	−10	8_n580	−9	6_n644	−29	6·924	−28	6·809	−29	6·162	−29
0·82	8_n869	−9	8_n571	−10	6_n615	−29	6·896	−28	6·780	−28	6·133	−29
0·83	8_n860	−10	8_n561	−10	6_n586	−29	6·868	−28	6·752	−29	6·104	−29
0·84	8_n850	−9	8_n551	−9	6_n557	−29	6·840	−29	6·723	−28	6·075	−29
0·85	8_n841	−10	8_n542	−10	6_n528	−29	6·811	−28	6·695	−29	6·046	−29
0·86	8_n831	−10	8_n532	−10	6_n499	−29	6·783	−29	6·666	−30	6·017	−29
0·87	8_n821	−9	8_n522	−10	6_n470	−30	6·754	−28	6·636	−29	5·988	−29
0·88	8_n812	−10	8_n512	−9	6_n440	−29	6·726	−29	6·607	−29	5·959	−29
0·89	8_n802	−10	8_n503	−10	6_n411	−29	6·697	−29	6·578	−28	5·930	−29
0·90	8_n792	−10	8_n493	−10	6_n382	−29	6·668	−28	6·550	−29	5·901	−29
0·91	8_n782	−9	8_n483	−10	6_n353	−30	6·640	−29	6·521	−29	5·872	−29
0·92	8_n773	−10	8_n473	−10	6_n323	−29	6·611	−29	6·492	−29	5·843	−30
0·93	8_n763	−10	8_n463	−9	6_n294	−30	6·582	−29	6·463	−29	5·813	−29
0·94	8_n753	−9	8_n454	−10	6_n264	−29	6·553	−29	6·434	−29	5·784	−29
0·95	8_n744	−10	8_n444	−10	6_n235	−30	6·524	−29	6·405	−29	5·755	−30
0·96	8_n734	−10	8_n434	−10	6_n205	−29	6·495	−29	6·376	−29	5·725	−29
0·97	8_n724	−10	8_n424	−10	6_n176	−30	6·466	−29	6·347	−29	5·696	−29
0·98	8_n714	−10	8_n414	−9	6_n146	−29	6·437	−29	6·318	−29	5·667	−30
0·99	8_n704	−9	8_n405	−10	6_n117	−30	6·408	−29	6·289	−29	5·637	−29
1·00	8_n695		8_n395		6_n087		6·379		6·260		5·608	

Tafel III.

g	log σ 0·8		1·0		1·2		1·4		1·6		1·8		2·0	
0·00	0n006	−23	0n183	−26	0n341	−29	0n485	−34	0n619	−40	0n746	−48	0n867	−57
+0·01	9n983	−22	0n157	−25	0n312	−29	0n451	−33	0n579	−39	0n698	46	0n810	−54
+0·02	9n961	−22	0n132	−25	0n283	−29	0n418	−33	0n540	−38	0n652	−44	0n756	−52
+0·03	9n939	−22	0n107	−25	0n254	−28	0n385	−32	0n502	−37	0n608	−43	0n704	−50
+0·04	9n917	−22	0n082	−24	0n226	−28	0n353	−31	0n465	−36	0n565	−42	0n654	−48
+0·05	9n895	−22	0n058	−24	0n198	−27	0n322	−31	0n429	−36	0n523	−40	0n606	−46
+0·06	9n873	−22	0n034	−24	0n171	27	0n291	−31	0n393	−34	0n383	−39	0n560	−44
+0·07	9n851	−21	0n010	−24	0n144	−26	0n260	−30	0n359	−34	0n444	−38	0n516	−43
+0·08	9n830	−21	9n986	−24	0n118	−26	0n230	−29	0n325	−33	0n406	−37	0n473	−41
+0·09	9n809	−21	9n962	−23	0n092	−26	0n201	29	0n292	−32	0n369	−36	0n432	−40
+0·10	9n788	−21	9n939	−24	0n066	−26	0n172	−29	0n260	−32	0n333	−35	0n392	−38
+0·11	9n767	−21	9n915	−23	0n040	−25	0n143	−28	0n228	−31	0n298	−34	0n354	−37
+0·12	9n746	21	9n892	−23	0n015	−25	0n115	−28	0n197	−30	0n264	33	0n317	−36
+0·13	9n725	20	9n869	−22	9n990	−25	0n087	−27	0n167	−30	0n231	−33	0n281	−36
+0·14	9n705	−21	9n847	−22	9n965	−25	0n060	−27	0n137	−29	0n198	−32	0n245	34
+0·15	9n684	−20	9n825	−22	9n940	−24	0n033	−26	0n108	−29	0n166	−31	0n211	−34
+0·16	9n664	−20	9n803	−22	9n916	−24	0n007	−26	0n079	−28	0n135	−31	0n177	−32
+0·17	9n644	−20	9n781	−21	9n892	−23	9n981	−26	0n051	−28	0n104	−30	0n145	−32
+0·18	9n624	−20	9n760	−22	9n869	−24	9n955	−25	0n023	−28	0n074	−29	0n113	−31
+0·19	9n604	−19	9n738	−21	9n845	−23	9n930	−25	9n995	−27	0n045	−29	0n082	−30
+0.20	9n585	−20	9n717	−21	9n822	−23	9n905	−25	9n968	−26	0n016	−28	0n052	−30
+0·21	9n565	−19	9n696	−21	9n799	−22	9n880	−24	9n942	−26	9n988	−27	0n022	−29
+0·22	9n546	−19	9n675	−21	9n777	−23	9n856	−24	9n916	−26	9n961	−27	9n993	−29
+0·23	9n527	−19	9n654	−20	9n754	−22	9n832	−24	9n890	−25	9n934	−27	9n964	−28
+0·24	9n508	−19	9n634	−21	9n732	−22	9n808	−24	9n865	−25	9n907	−27	9n936	−27
+0·25	9n489	−19	9n613	−20	9n710	−21	9n784	−23	9n840	−25	9n880	−26	9n909	−27
+0·26	9n470	−19	9n593	−20	9n689	−22	9n761	−23	9n815	−24	9n854	−26	9n882	−26
+0·27	9n451	−18	9n573	−20	9n667	−21	9n738	−23	9n791	−24	9n828	−25	9n856	−26
+0·28	9n433	−19	9n553	−20	9n646	−21	9n715	−22	9n767	−24	9n803	−25	9n830	−26
+0·29	9n414	−18	9n533	−20	9n625	−21	9n693	−22	9n743	−23	9n778	−24	9n804	−25
+0·30	9n396	−19	9n513	−20	9n604	−21	9n671	−22	9n720	−23	9n754	−24	9n779	−25
+0·31	9n377	−18	9n493	−19	9n583	−21	9n649	−22	9n697	−23	9n730	−23	9n754	−24
+0·32	9n359	−18	9n474	−19	9n562	−20	9n627	−22	9n674	−23	9n707	−23	9n730	−24
+0·33	9n341	−18	9n455	−19	9n542	−20	9n605	−21	9n651	−22	9n684	−23	9n706	−24
+0·34	9n323	−18	9n436	−19	9n522	−20	9n584	−21	9n629	−22	9n661	−23	9n682	−23
+0·35	9n305	−17	9n417	−18	9n502	−20	9n563	−21	9n607	−22	9n638	−22	9n659	−23
+0·36	9n288	−18	9n399	−18	9n482	−20	9n542	−21	9n585	−21	9n616	−22	9n636	−23
+0·37	9n270	−17	9n381	−18	9n462	−19	9n521	−20	9n564	−21	9n594	−22	9n613	−22
+0·38	9n253	−17	9n363	−18	9n443	−19	9n501	−20	9n543	−21	9n572	−22	9n591	−22
+0·39	9n236	−17	9n345	−18	9n424	−19	9n481	−20	9n522	−21	9n550	−21	9n569	−22
+0·40	9n219	−17	9n327	−19	9n405	−19	9n461	−20	9n501	−21	9n529	−21	9n547	−22
+0·41	9n202	−17	9n308	−18	9n386	−19	9n441	−19	9n480	−20	9n508	−21	9n525	−21
+0·42	9n185	−17	9n290	−18	9n367	−19	9n422	−20	9n460	−20	9n487	−21	9n504	−21
+0·43	9n168	−17	9n272	−18	9n348	−19	9n402	−19	9n440	−20	9n466	−21	9n483	−21
+0·44	9n151	−17	9n254	−18	9n329	−18	9n383	−19	9n420	−20	9n445	−20	9n462	−21
+0·45	9n134	−16	9n236	−17	9n311	−18	9n364	−19	9n400	−19	9n425	−20	9n441	−20
+0·46	9n118	−17	9n219	−17	9n293	−18	9n345	−19	9n381	−20	9n405	−20	9n421	−20
+0·47	9n101	−16	9n202	−17	9n275	−18	9n326	−19	9n361	−19	9n385	−19	9n401	−20
+0·48	9n085	−17	9n185	−17	9n257	−18	9n307	−19	9n342	−19	9n366	−20	9n381	−20
+0·49	9n068	−16	9n168	−17	9n239	−18	9n288	−18	9n323	−19	9n346	−19	9n361	−19
+0·50	9n052		9n151		9n221		9n270		9n304		9n327		9n342	

Tafel III.

g	log σ													
	0·8		1·0		1·2		1·4		1·6		1·8		2·0	
+0·50	9„052	−16	9„151	−17	9„221	−18	9„270	−18	9„304	−19	9„327	−19	9„342	−19
+0·51	9„036	−16	9„134	−17	9„203	−17	9„252	−18	9„285	−18	9„308	−19	9„323	−19
+0·52	9„020	−16	9„117	−17	9„186	−17	9„234	−18	9„267	−19	9„289	−19	9„304	−19
+0·53	9„004	−16	9„100	−16	9„169	−17	9„216	−18	9„248	−18	9„270	−18	9„285	−19
+0·54	8„988	−16	9„084	−17	9„152	−17	9„198	−18	9„230	−18	9„252	−19	9„266	−19
+0·55	8„972	−15	9„067	−16	9„135	−17	9„180	−17	9„212	−18	9„233	−18	9„247	−18
+0·56	8„957	−16	9„051	−16	9„118	−17	9„163	−17	9„194	−18	9„215	−18	9„229	−18
+0·57	8„941	−15	9„035	−16	9„101	−17	9„146	−17	9„176	−17	9„197	−18	9„211	−18
+0·58	8„926	−16	9„019	−16	9„084	−17	9„129	−17	9„159	−18	9„179	−18	9„193	−18
+0·59	8„910	−15	9„003	−16	9„067	−16	9„112	−17	9„141	−17	9„161	−17	9„175	−18
+0·60	8„895	−16	8„987	−16	9„051	−17	9„095	−17	9„124	−17	9„144	−18	9„157	−18
+0·61	8„879	−15	8„971	−16	9„034	−16	9„078	−17	9„107	−17	9„126	−17	9„139	−17
+0·62	8„864	−15	8„955	−16	9„018	−16	9„061	−17	9„090	−17	9„109	−17	9„122	−18
+0·63	8„849	−15	8„939	−15	9„002	−16	9„044	−16	9„073	−17	9„092	−17	9„104	−17
+0·64	8„834	−15	8„924	−16	8„986	−16	9„028	−17	9„056	−17	9„075	−17	9„087	−17
+0·65	8„819	−15	8„908	−15	8„970	−16	9„011	−16	9„039	−16	9„058	−17	9„070	−17
+0·66	8„804	−15	8„893	−16	8„954	−16	8„995	−16	9„023	−17	9„041	−17	9„053	−17
+0·67	8„789	−14	8„877	−15	8„938	−16	8„979	−16	9„006	−16	9„024	−16	9„036	−16
+0·68	8„775	−15	8„862	−15	8„922	−16	8„963	−16	8„990	−16	9„008	−16	9„020	−17
+0·69	8„760	−14	8„847	−15	8„906	−15	8„947	−16	8„974	−16	8„992	−16	9„003	−16
+0·70	8„746	−15	8„832	−15	8„891	−16	8„931	−16	8„958	−16	8„976	−16	8„987	−16
+0·71	8„731	−14	8„817	−15	8„875	−15	8„915	−15	8„942	−16	8„960	−16	8„971	−16
+0·72	8„717	−15	8„802	−15	8„860	−15	8„900	−16	8„926	−16	8„944	−16	8„955	−16
+0·73	8„702	−14	8„787	−14	8„845	−15	8„884	−15	8„910	−15	8„928	−16	8„939	−16
+0·74	8„688	−14	8„773	−15	8„830	−15	8„869	−15	8„895	−16	8„912	−16	8„923	−16
+0·75	8„674	−14	8„758	−14	8„815	−14	8„854	−15	8„879	−15	8„896	−15	8„907	−16
+0·76	8„660	−14	8„744	−15	8„801	−15	8„839	−15	8„864	−16	8„881	−16	8„891	−16
+0·77	8„646	−14	8„729	−14	8„786	−15	8„824	−15	8„848	−15	8„865	−15	8„875	−15
+0·78	8„632	−14	8„715	−14	8„771	−15	8„809	−15	8„833	−15	8„850	−16	8„860	−16
+0·79	8„618	−14	8„701	−14	8„756	−14	8„794	−15	8„818	−15	8„834	−15	8„844	−15
+0·80	8„604	−14	8„687	−14	8„742	−15	8„779	−15	8„803	−15	8„819	−15	8„829	−15
+0·81	8„590	−13	8„673	−14	8„727	−14	8„764	−15	8„788	−15	8„804	−15	8„814	−15
+0·82	8„577	−14	8„659	−14	8„713	−15	8„749	−15	8„773	−15	8„789	−15	8„799	−15
+0·83	8„563	−13	8„645	−14	8„698	−14	8„734	−14	8„758	−14	8„774	−15	8„784	−15
+0·84	8„550	−14	8„631	−14	8„684	−14	8„720	−15	8„744	−15	8„759	−15	8„769	−15
+0·85	8„536	−13	8„617	−14	8„670	−14	8„705	−14	8„729	−14	8„744	−14	8„754	−14
+0·86	8„523	−13	8„603	−14	8„656	−14	8„691	−14	8„715	−15	8„730	−15	8„740	−15
+0·87	8„510	−13	8„589	−13	8„642	−14	8„677	−14	8„700	−14	8„715	−14	8„725	−14
+0·88	8„497	−14	8„576	−14	8„628	−14	8„663	−14	8„686	−14	8„701	−15	8„711	−15
+0·89	8„483	−13	8„562	−14	8„614	−14	8„649	−14	8„672	−14	8„686	−14	8„696	−14
+0·90	8„470	−13	8„548	−14	8„600	−14	8„635	−14	8„658	−14	8„672	−14	8„682	−14
+0·91	8„457	−13	8„534	−13	8„586	−13	8„621	−13	8„644	−14	8„658	−14	8„668	−14
+0·92	8„444	−13	8„521	−13	8„573	−14	8„608	−14	8„630	−14	8„644	−14	8„654	−14
+0·93	8„431	−13	8„508	−13	8„559	−13	8„594	−13	8„616	−14	8„630	−14	8„640	−14
+0·94	8„418	−13	8„495	−13	8„546	−13	8„581	−14	8„602	−14	8„616	−14	8„626	−14
+0·95	8„405	−12	8„482	−13	8„533	−13	8„567	−13	8„588	−13	8„602	−13	8„612	−14
+0·96	8„393	−13	8„469	−13	8„520	−13	8„554	−14	8„575	−14	8„589	−14	8„598	−14
+0·97	8„380	−13	8„456	−13	8„507	−13	8„540	−13	8„561	−13	8„575	−13	8„584	−14
+0·98	8„367	−13	8„443	−13	8„594	−13	8„527	−13	8„548	−14	8„562	−14	8„570	−14
+0·99	8„354	−12	8„430	−12	8„481	−12	8„514	−13	8„534	−13	8„548	−13	8„556	−13
+1·00	8„342		8„418		8„469		8„501		8„521		8„535		8„543	

Tafel III.

log g	log σ													
	0·8		1·0		1·2		1·4		1·6		1·8		2·0	
0·00	8_n342	-29	8_n418	-30	8_n469	-31	8_n501	-31	8_n521	-31	8_n535	-31	8_n543	-31
0·01	8_n313	-30	8_n388	-30	8_n438	-31	8_n470	-32	8_n490	-32	8_n504	-32	8_n512	-32
0·02	8_n283	-30	8_n358	-31	8_n407	-31	8_n438	-31	8_n458	-32	8_n472	-32	8_n480	-31
0·03	8_n253	-30	8_n327	-31	8_n376	-32	8_n407	-32	8_n426	-32	8_n440	-32	8_n449	-32
0·04	8_n223	-30	8_n296	-31	8_n344	-31	8_n375	-32	8_n394	-32	8_n408	-32	8_n417	-33
0·05	8_n193	-31	8_n265	-31	8_n313	-32	8_n343	-33	8_n362	-32	8_n376	-33	8_n384	-33
0·06	8_n162	-31	8_n234	-32	8_n281	-32	8_n310	-32	8_n330	-32	8_n343	-33	8_n351	-33
0·07	8_n131	-32	8_n202	-32	8_n249	-33	8_n278	-33	8_n298	-33	8_n310	-33	8_n318	-33
0·08	8_n099	-32	8_n170	-32	8_n216	-33	8_n245	-33	8_n265	-33	8_n277	-34	8_n285	-34
0·09	8_n067	-32	8_n138	-33	8_n183	-33	8_n212	-33	8_n232	-34	8_n243	-34	8_n251	-34
0·10	8_n035	-32	8_n105	-33	8_n150	-34	8_n179	-34	8_n198	-34	8_n209	-34	8_n217	-34
0·11	8_n003	-33	8_n072	-34	8_n116	-34	8_n145	-34	8_n164	-34	8_n175	-34	8_n183	-34
0·12	7_n970	-33	8_n038	-34	8_n082	-34	8_n111	-34	8_n130	-34	8_n141	-35	8_n149	-35
0·13	7_n937	-34	8_n004	-34	8_n048	-34	8_n077	-35	8_n096	-35	8_n106	-35	8_n114	-36
0·14	7_n903	-34	7_n970	-34	8_n014	-35	8_n042	-35	8_n061	-35	8_n071	-35	8_n078	-35
0·15	7_n869	-34	7_n936	-35	7_n979	-35	8_n007	-36	8_n026	-36	8_n036	-36	8_n043	36
0·16	7_n835	-35	7_n901	-35	7_n944	-35	7_n971	-35	7_n990	-36	8_n000	-36	8_n007	-36
0·17	7_n800	-35	7_n866	-35	7_n909	-36	7_n936	-36	7_n954	-36	7_n964	-36	7_n971	-37
0·18	7_n765	-35	7_n831	-36	7_n873	-36	7_n900	-36	7_n918	-37	7_n928	-36	7_n934	36
0·19	7_n730	-36	7_n795	-36	7_n837	-37	7_n864	-37	7_n881	-37	7_n892	-37	7_n898	-37
0·20	7_n694	-36	7_n759	-36	7_n800	-37	7_n827	-37	7_n844	-37	7_n855	-37	7_n861	-37
0·21	7_n658	-36	7_n723	-37	7_n763	-37	7_n790	-37	7_n807	-38	7_n818	-38	7_n824	-38
0·22	7_n622	-37	7_n686	-37	7_n726	-37	7_n753	-38	7_n769	-38	7_n780	-38	7_n786	-37
0·23	7_n585	-37	7_n649	-38	7_n689	-38	7_n715	-38	7_n731	-38	7_n742	-38	7_n749	-38
0·24	7_n548	-37	7_n611	-37	7_n651	-38	7_n677	-38	7_n693	-38	7_n704	-39	7_n711	-39
0·25	7_n511	-38	7_n574	-38	7_n613	-38	7_n639	-39	7_n655	-39	7_n665	-39	7_n672	-39
0·26	7_n473	-38	7_n536	-38	7_n575	-39	7_n600	-39	7_n616	-39	7_n626	-39	7_n633	-39
0·27	7_n435	-39	7_n498	-39	7_n536	-39	7_n561	-39	7_n577	-39	7_n587	-39	7_n594	-39
0·28	7_n396	-38	7_n459	-39	7_n497	-39	7_n522	-39	7_n538	-39	7_n548	-39	7_n555	-40
0·29	7_n358	-39	7_n420	-39	7_n458	-39	7_n483	-40	7_n499	-40	7_n509	-40	7_n515	-40
0·30	7_n319	-39	7_n381	-39	7_n419	-40	7_n443	-40	7_n459	-40	7_n469	-40	7_n475	-40
0·31	7_n280	-40	7_n342	-40	7_n379	-40	7_n403	-40	7_n419	-40	7_n429	-40	7_n435	-40
0·32	7_n240	-40	7_n302	-40	7_n339	-40	7_n363	-40	7_n379	-40	7_n389	-41	7_n395	-41
0·33	7_n200	40	7_n262	-40	7_n299	-41	7_n323	-41	7_n339	-41	7_n348	-41	7_n354	-41
0·34	7_n160	-40	7_n222	-41	7_n258	-41	7_n282	-41	7_n298	-41	7_n307	-41	7_n313	-41
0·35	7_n120	-41	7_n181	-41	7_n217	-41	7_n241	-41	7_n257	-42	7_n266	-41	7_n272	-41
0·36	7_n079	-41	7_n140	-41	7_n176	-41	7_n200	-41	7_n215	-42	7_n225	-42	7_n231	-42
0·37	7_n038	-41	7_n099	-42	7_n135	-42	7_n159	-42	7_n173	-42	7_n183	-42	7_n189	-42
0·38	6_n997	-41	7_n057	-42	7_n093	-42	7_n117	-42	7_n131	-42	7_n141	-42	7_n147	-42
0·39	6_n956	-42	7_n015	-42	7_n051	-42	7_n075	-42	7_n089	-42	7_n099	-42	7_n105	-42
0·40	6_n914	-42	6_n973	-42	7_n009	-42	7_n033	-42	7_n047	-42	7_n057	-43	7_n063	-43
0·41	6_n872	-42	6_n931	-42	6_n967	-42	6_n991	43	7_n005	-43	7_n014	-43	7_n020	-43
0·42	6_n830	-42	6_n889	-43	6_n925	-43	6_n948	-43	6_n962	-43	6_n971	-43	6_n977	-43
0·43	6_n788	-43	6_n846	-43	6_n882	-43	6_n905	-43	6_n919	-43	6_n928	-43	6_n934	-44
0·44	6_n745	-43	6_n803	-43	6_n839	-43	6_n862	-43	6_n876	-43	6_n885	-44	6_n890	-43
0·45	6_n702	-44	6_n760	-44	6_n796	-43	6_n819	-44	6_n833	-44	6_n841	-44	6_n847	-44
0·46	6_n658	44	6_n716	-44	6_n753	-44	6_n775	-44	6_n789	-44	6_n797	-44	6_n803	-44
0·47	6_n614	-45	6_n672	-44	6_n709	-44	6_n731	-44	6_n745	-45	6_n753	-44	6_n759	-44
0·48	6_n569	-45	6_n628	-44	6_n665	-44	6_n687	-44	6_n700	-45	6_n709	-44	6_n715	-44
0·49	6_n524	-45	6_n584	-45	6_n621	-44	6_n643	-45	6_n655	-45	6_n665	-45	6_n671	-45
0·50	6_n479		6_n539		6_n577		6_n598		6_n610		6_n620		6_n626	

Tafel III.

log g	log σ = 0·8		1·0		1·2		1·6		2·0	
0·50	6″48	−4	6″54	−4	6″58	−4	6″61	−4	6″63	−4
0·51	6″44	−5	6″50	−5	6″54	−5	6″57	−5	6″59	−5
0·52	6″39	−4	6″45	−4	6″49	−4	6″52	−4	6″54	−4
0·53	6″35	−5	6″41	−5	6″45	−5	6″48	−5	6″50	−5
0·54	6″30	−4	6″36	−4	6″40	−4	6″43	−4	6″45	−4
0·55	6″26	−5	6″32	−5	6″36	−5	6″39	−5	6″41	−5
0·56	6″21	−4	6″27	−4	6″31	−5	6″34	−5	6″36	−5
0·57	6″17	−5	6″23	−5	6″26	−4	6″29	−4	6″31	−4
0·58	6″12	−4	6″18	−5	6″22	−5	6″25	−5	6″27	−5
0·59	6″08	−5	6″13	−5	6″17	−5	6″20	−5	6″22	−5
0·60	6″03	−4	6″08	−4	6″12	−4	6″15	−4	6″17	−4
0·61	5″99	−5	6″04	−5	6″08	−5	6″11	−5	6″13	−5
0·62	5″94	−4	5″99	−4	6″03	−5	6″06	−5	6″08	−5
0·63	5″90	−5	5″95	−5	5″98	−4	6″01	−4	6″03	−5
0·64	5″85	−5	5″90	−5	5″94	−5	5″97	−5	5″98	−4
0·65	5″80	−4	5″85	−4	5″89	−5	5″92	−5	5″94	−5
0·66	5″76	−5	5″81	−5	5″84	−4	5″87	−4	5″89	−5
0·67	5″71	−5	5″76	−5	5″80	−5	5″83	−5	5″84	−5
0·68	5″66	−4	5″71	−4	5″75	−5	5″78	−5	5″79	−4
0·69	5″62	−5	5″67	−5	5″70	−4	5″73	−4	5″75	−5
0·70	5″57	−5	5″62	−5	5″66	−5	5″69	−5	5″70	−5
0·71	5″52	−4	5″57	−4	5″61	−5	5″64	−5	5″65	−5
0·72	5″48	−5	5″53	−5	5″56	−4	5″59	−4	5″60	−4
0·73	5″43	−5	5″48	−5	5″52	−5	5″55	−5	5″56	−5
0·74	5″38	−4	5″43	−4	5″47	−5	5″50	−5	5″51	−5
0·75	5″34	−5	5″39	−5	5″42	−5	5″45	−5	5″46	−5
0·76	5″29	−4	5″34	−5	5″37	−4	5″40	−4	5″41	−4
0·77	5″25	−5	5″29	−4	5″33	−5	5″36	−5	5″37	−5
0·78	5″20	−5	5″25	−5	5″28	−5	5″31	−5	5″32	−5
0·79	5″15	−4	5″20	−5	5″23	−5	5″26	−5	5″27	−5
0·80	5″11	−5	5″15	−5	5″18	−4	5″21	−4	5″22	−4
0·81	5″06	−5	5″10	−5	5″14	−5	5″17	−5	5″18	−5
0·82	5″01	−4	5″05	−4	5″09	−5	5″12	−5	5″13	−5
0·83	4″97	−5	5″01	−5	5″04	−5	5″07	−5	5″08	−5
0·84	4″92	−4	4″96	−4	4″99	−4	5″02	−4	5″03	−4
0·85	4″88	−5	4″92	−5	4″95	−5	4″98	−5	4″99	−5
0·86	4″83	−5	4″87	−5	4″90	−5	4″93	−5	4″94	−5
0·87	4″78	−4	4″82	−5	4″85	−5	4″88	−5	4″89	−5
0·88	4″74	−5	4″77	−5	4″80	−4	4″83	−4	4″84	−4
0·89	4″69	−5	4″72	−5	4″76	−5	4″79	−5	4″80	−5
0·90	4″64	−4	4″67	−4	4″71	−5	4″74	−5	4″75	−5
0·91	4″60	−5	4″63	−5	4″66	−5	4″69	−5	4″70	−5
0·92	4″55	−4	4″58	−4	4″61	−4	4″64	−4	4″65	−4
0·93	4″51	−5	4″54	−5	4″57	−5	4″60	−5	4″61	−5
0·94	4″46	−5	4″49	−5	4″52	−5	4″55	−5	4″56	−5
0·95	4″41	−4	4″44	−4	4″47	−5	4″50	−5	4″51	−5
0·96	4″37	−5	4″40	−5	4″42	−4	4″45	−4	4″46	−4
0·97	4″32	−5	4″35	−5	4″38	−5	4″41	−5	4″42	−5
0·98	4″27	−4	4″30	−4	4″33	−5	4″36	−5	4″37	−5
0·99	4″23	−5	4″26	−5	4″28	−5	4″31	−5	4″32	−5
1·00	4″18		4″21		4″23		4″26		4″27	

Tafel IV.

y	$\log \varphi_B$		$\log \varphi_\beta$		y	$\log \varphi_B$		$\log \varphi_\beta$		y	$\log \varphi_B$		$\log \varphi_\beta$	
−0·50	9_n590	−5	9_n642	−8	0·00	9_n337	−5	9_n255	−7	+0·50	9_n103	−5	8_n943	−7
−0·49	9_n585	−6	9_n634	−10	+0·01	9_n332	−5	9_n248	−7	+0·51	9_n098	−4	8_n936	−5
−0·48	9_n579	−5	9_n624	−8	+0·02	9_n327	−5	9_n241	−6	+0·52	9_n094	−4	8_n931	−5
−0·47	9_n574	−5	9_n616	−8	+0·03	9_n322	−4	9_n235	−7	+0·53	9_n090	−5	8_n926	−6
−0·46	9_n569	−6	9_n608	−9	+0·04	9_n318	−6	9_n228	−8	+0·54	9_n085	−4	8_n920	−5
−0·45	9_n563	−5	9_n599	−8	+0·05	9_n312	−5	9_n220	−6	+0·55	9_n081	−5	8_n915	−6
−0·44	9_n558	−4	9_n591	−8	+0·06	9_n307	−5	9_n214	−8	+0·56	9_n076	−4	8_n909	−5
−0·43	9_n554	−6	9_n583	−9	+0·07	9_n302	−5	9_n206	−6	+0·57	9_n072	−4	8_n904	−6
−0·42	9_n548	−5	9_n574	−9	+0·08	9_n297	−4	9_n200	−6	+0·58	9_n068	−4	8_n898	−5
−0·41	9_n543	−5	9_n565	−7	+0·09	9_n293	−5	9_n194	−7	+0·59	9_n064	−5	8_n893	−6
−0·40	9_n538	−5	9_n558	−9	+0·10	9_n288	−5	9_n187	−7	+0·60	9_n059	−5	8_n887	−6
−0·39	9_n533	−5	9_n549	−7	+0·11	9_n283	−4	9_n180	−6	+0·61	9_n054	−3	8_n881	−4
−0·38	9_n528	−5	9_n542	−9	+0·12	9_n279	−6	9_n174	−7	+0·62	9_n051	−5	8_n877	−6
−0·37	9_n523	−6	9_n533	−8	+0·13	9_n273	−4	9_n167	−6	+0·63	9_n046	−4	8_n871	−5
−0·36	9_n517	−5	9_n525	−9	+0·14	9_n269	−5	9_n161	−8	+0·64	9_n042	−4	8_n866	−5
−0·35	9_n512	−4	9_n516	−7	+0·15	9_n264	−4	9_n153	−5	+0·65	9_n038	−5	8_n861	−6
−0·34	9_n508	−6	9_n509	−8	+0·16	9_n260	−6	9_n148	−7	+0·66	9_n033	−3	8_n855	−5
−0·33	9_n502	−5	9_n501	−8	+0·17	9_n254	−4	9_n141	−6	+0·67	9_n030	−5	8_n850	−5
−0·32	9_n497	−5	9_n493	−8	+0·18	9_n250	−5	9_n135	−6	+0·68	9_n025	−5	8_n845	−6
−0·31	9_n492	−5	9_n485	−8	+0·19	9_n245	−5	9_n129	−7	+0·69	9_n020	−4	8_n839	−5
−0·30	9_n487	−5	9_n477	−8	+0·20	9_n240	−4	9_n122	−6	+0·70	9_n016	−3	8_n834	−5
−0·29	9_n482	−5	9_n469	−7	+0·21	9_n236	−5	9_n116	−6	+0·71	9_n013	−5	8_n829	−5
−0·28	9_n477	−5	9_n462	−8	+0·22	9_n231	−5	9_n110	−7	+0·72	9_n008	−4	8_n824	−5
−0·27	9_n472	−6	9_n454	−9	+0·23	9_n226	−5	9_n103	−7	+0·73	9_n004	−5	8_n819	−6
−0·26	9_n466	−5	9_n445	−7	+0·24	9_n221	−4	9_n096	−5	+0·74	8_n999	−4	8_n813	−5
−0·25	9_n461	−5	9_n438	−8	+0·25	9_n217	−5	9_n091	−6	+0·75	8_n995	−4	8_n808	−5
−0·24	9_n456	−4	9_n430	−7	+0·26	9_n212	−4	9_n085	−7	+0·76	8_n991	−4	8_n803	−4
−0·23	9_n452	−6	9_n423	−8	+0·27	9_n208	−5	9_n078	−6	+0·77	8_n987	−4	8_n799	−5
−0·22	9_n446	−5	9_n415	−8	+0·28	9_n203	−5	9_n072	−6	+0·78	8_n983	−4	8_n794	−6
−0·21	9_n441	−4	9_n407	−7	+0·29	9_n198	−5	9_n066	−6	+0·79	8_n979	−4	8_n788	−5
−0·20	9_n437	−6	9_n400	−8	+0·30	9_n193	−4	9_n060	−7	+0·80	8_n975	−4	8_n783	−5
−0·19	9_n431	−5	9_n392	−7	+0·31	9_n189	−5	9_n053	−6	+0·81	8_n971	−5	8_n778	−5
−0·18	9_n426	−5	9_n385	−8	+0·32	9_n184	−4	9_n047	−6	+0·82	8_n966	−4	8_n773	−5
−0·17	9_n421	−5	9_n377	−7	+0·33	9_n180	−5	9_n041	−6	+0·83	8_n962	−4	8_n768	−5
−0·16	9_n416	−5	9_n370	−8	+0·34	9_n175	−5	9_n035	−6	+0·84	8_n958	−4	8_n763	−5
−0·15	9_n411	−5	9_n362	−7	+0·35	9_n170	−4	9_n029	−6	+0·85	8_n954	−4	8_n758	−4
−0·14	9_n406	−5	9_n355	−7	+0·36	9_n166	−5	9_n023	−5	+0·86	8_n950	−4	8_n754	−5
−0·13	9_n401	−5	9_n348	−8	+0·37	9_n161	−4	9_n018	−6	+0·87	8_n946	−4	8_n749	−5
−0·12	9_n396	−5	9_n340	−7	+0·38	9_n157	−5	9_n012	−6	+0·88	8_n942	−4	8_n744	−5
−0·11	9_n391	−5	9_n333	−7	+0·39	9_n152	−4	9_n006	−6	+0·89	8_n938	−4	8_n739	−5
−0·10	9_n386	−5	9_n326	−7	+0·40	9_n148	−5	9_n000	−6	+0·90	8_n934	−4	8_n734	−4
−0·09	9_n381	−5	9_n319	−8	+0·41	9_n143	−5	8_n994	−6	+0·91	8_n930	−4	8_n730	−5
−0·08	9_n376	−5	9_n311	−7	+0·42	9_n138	−4	8_n988	−6	+0·92	8_n926	−4	8_n725	−6
−0·07	9_n371	−5	9_n304	−7	+0·43	9_n134	−4	8_n982	−5	+0·93	8_n922	−4	8_n719	−4
−0·06	9_n366	−5	9_n297	−7	+0·44	9_n130	−4	8_n977	−6	+0·94	8_n918	−4	8_n715	−5
−0·05	9_n361	−5	9_n290	−7	+0·45	9_n126	−6	8_n971	−7	+0·95	8_n914	−4	8_n710	−4
−0·04	9_n356	−5	9_n283	−7	+0·46	9_n120	−4	8_n964	−5	+0·96	8_n910	−4	8_n706	−5
−0·03	9_n351	−5	9_n276	−7	+0·47	9_n116	−4	8_n959	−5	+0·97	8_n906	−4	8_n701	−4
−0·02	9_n346	−5	9_n269	−7	+0·48	9_n112	−5	8_n954	−6	+0·98	8_n902	−5	8_n697	−6
−0·01	9_n341	−4	9_n262	−7	+0·49	9_n107	−4	8_n948	−5	+0·99	8_n897	−3	8_n691	−4
0·00	9_n337		9_n255		+0·50	9_n103		8_n943		+1·00	8_n894		8_n687	

Tafel IV.

log g	log φ_B		log φ_β		log g	log φ_B		log φ_β	
0·00	8_n894	−8	8_n687	−10	0·50	8_n247	−16	7_n971	−17
0·01	8_n886	−10	8_n677	−12	0·51	8_n231	−17	7_n954	−18
0·02	8_n876	−9	8_n665	−11	0·52	8_n214	−17	7_n936	−18
0·03	8_n867	−10	8_n654	−11	0·53	8_n197	−17	7_n918	−18
0·04	8_n857	−10	8_n643	−11	0·54	8_n180	−16	7_n900	−17
0·05	8_n847	−9	8_n632	−12	0·55	8_n164	−18	7_n883	−18
0·06	8_n838	−10	8_n620	−11	0·56	8_n146	−17	7_n865	−18
0·07	8_n828	−10	8_n609	−12	0·57	8_n129	−17	7_n847	−18
0·08	8_n818	−11	8_n597	−12	0·58	8_n112	−18	7_n829	−18
0·09	8_n807	−10	8_n585	−12	0·59	8_n094	−17	7_n811	−18
0·10	8_n797	−11	8_n573	−13	0·60	8_n077	−18	7_n793	−19
0·11	8_n786	−11	8_n560	−12	0·61	8_n059	−17	7_n774	−17
0·12	8_n775	−12	8_n548	−13	0·62	8_n042	−18	7_n757	−19
0·13	8_n763	−10	8_n535	−12	0·63	8_n024	−18	7_n738	−18
0·14	8_n753	−12	8_n523	−14	0·64	8_n006	−18	7_n720	−19
0·15	8_n741	−11	8_n509	−12	0·65	7_n988	−18	7_n701	−18
0·16	8_n730	−12	8_n497	−14	0·66	7_n970	−18	7_n683	−20
0·17	8_n718	−11	8_n483	−13	0·67	7_n952	−18	7_n663	−18
0·18	8_n707	−12	8_n470	−13	0·68	7_n934	−19	7_n645	−19
0·19	8_n695	−13	8_n457	−15	0·69	7_n915	−18	7_n626	−19
0·20	8_n682	−12	8_n442	−13	0·70	7_n897	−18	7_n607	−18
0·21	8_n670	−13	8_n429	−14	0·71	7_n879	−19	7_n589	−20
0·22	8_n657	−12	8_n415	−14	0·72	7_n860	−18	7_n569	−18
0·23	8_n645	−13	8_n401	−15	0·73	7_n842	−18	7_n551	−19
0·24	8_n632	−13	8_n386	−14	0·74	7_n824	−19	7_n532	−19
0·25	8_n619	−13	8_n372	−15	0·75	7_n805	−19	7_n513	−19
0·26	8_n606	−14	8_n357	−14	0·76	7_n786	−18	7_n494	−19
0·27	8_n592	−12	8_n343	−15	0·77	7_n768	−19	7_n475	−19
0·28	8_n580	−14	8_n328	−15	0·78	7_n749	−19	7_n456	−20
0·29	8_n566	−14	8_n313	−15	0·79	7_n730	−19	7_n436	−19
0·30	8_n552	−13	8_n298	−15	0·80	7_n711	−18	7_n417	−19
0·31	8_n539	−15	8_n283	−16	0·81	7_n693	−19	7_n398	−19
0·32	8_n524	−15	8_n267	−16	0·82	7_n674	−20	7_n379	−20
0·33	8_n509	−13	8_n251	−15	0·83	7_n654	−19	7_n359	−19
0·34	8_n496	−14	8_n236	−15	0·84	7_n635	−19	7_n340	−19
0·35	8_n482	−16	8_n221	−16	0·85	7_n616	−19	7_n321	−19
0·36	8_n466	−14	8_n205	−16	0·86	7_n597	−20	7_n302	−19
0·37	8_n452	−15	8_n189	−16	0·87	7_n577	−19	7_n283	−20
0·38	8_n437	−16	8_n173	−17	0·88	7_n558	−20	7_n263	−20
0·39	8_n421	−15	8_n156	−16	0·89	7_n538	−19	7_n243	−19
0·40	8_n406	−15	8_n140	−16	0·90	7_n519	−19	7_n224	−19
0·41	8_n391	−15	8_n124	−17	0·91	7_n500	−19	7_n205	−20
0·42	8_n376	−16	8_n107	−16	0·92	7_n481	−19	7_n185	−19
0·43	8_n360	−15	8_n091	−17	0·93	7_n462	−19	7_n166	−20
0·44	8_n345	−16	8_n074	−17	0·94	7_n443	−18	7_n146	−19
0·45	8_n329	−16	8_n057	−17	0·95	7_n425	−20	7_n127	−21
0·46	8_n313	16	8_n040	−17	0·96	7_n405	−20	7_n106	−19
0·47	8_n297	−17	8_n023	−17	0·97	7_n385	−19	7_n087	−19
0·48	8_n280	−16	8_n006	−18	0·98	7_n366	−20	7_n068	−20
0·49	8_n264	−17	7_n988	−17	0·99	7_n346	−19	7_n048	−20
0·50	8_n247		7_n971		1·00	7_n327		7_n028	

Ergänzungen zu Tafel I.

g	$\log \Phi_0$		$\log \Phi_1$		$\log \Phi_2$	
—0·60	0·30906	—732	9_n9137	—244	9·831	—37
—0·59	0·30174	—727	9_n8893	—244	9·794	—37
—0·58	0·29447	—722	9_n8649	—245	9·757	—38
—0·57	0·28725	—716	9_n8404	—245	9·719	—37
—0·56	0·28009	—712	9_n8159	—246	9·682	—37
—0·55	0·27297	—707	9_n7913	—247	9·645	—37
—0·54	0·26590	—702	9_n7666	—247	9·608	—37
—0·53	0·25888	—697	9_n7419	—248	9·571	—37
—0·52	0·25191	—693	9_n7171	—249	9·534	—37
—0·51	0·24498	—688	9_n6922	—250	9·497	—38
—0·50	0 23810		9_n6672		9·459	

Ergänzungen zu Tafel II.

g	φ_1		φ_2		$\log \varphi_3$		φ_4		φ_5		φ_6	
—0·60	+0·015	—24	+0·241	—29	0_n401	—16	—0·373	+28	—1·028	+77	—0·661	+52
—0·59	—0·009	—23	+0·212	—28	0_n385	—16	—0·345	+27	—0·951	+73	—0·609	+48
—0·58	—0·032	—22	+0·184	—26	0_n369	—16	—0·318	+26	—0·878	+67	—0·561	+45
—0·57	—0·054	—21	+0·158	—25	0_n353	—16	—0·292	+24	—0·811	+64	—0·516	+42
—0·56	—0·075	—20	+0·133	—24	0_n337	—16	—0·268	+23	—0·747	+60	—0·474	+39
—0·55	—0·095	—19	+0·109	—23	0_n321	—16	—0·245	+22	—0·687	+56	—0·435	+36
—0·54	—0·114	—18	+0·086	—21	0_n305	—16	—0·223	+20	—0·631	+52	—0·399	+33
—0·53	—0·132	—18	+0·065	—20	0_n289	—15	—0·203	+19	—0·579	+49	—0·366	+31
—0·52	—0·150	—17	+0·045	—19	0_n274	—16	—0·184	+18	—0·530	+46	—0·335	+29
—0·51	—0·167	—16	+0·026	—18	0_n258	—16	—0·166	+18	—0·484	+43	—0·306	+27
—0·50	—0·183		+0·008		0_n242		—0·148		—0·441		—0·279	